

## Zu Platons Philosophie der Zahlen und deren mathematischer und philosophischer Bedeutung

VON VITTORIO HÖSLE

In seinem neuen Platonwerk<sup>1</sup>, das eine Zwischenbilanz sein will innerhalb der seit nunmehr fast einem Vierteljahrhundert währenden Diskussion um die platonische Esoterik<sup>2</sup> und das in der Tat eine Leistung darstellt, hinter die es kein Zurück mehr geben sollte, hat Hans Krämer u. a. einige methodologische Forderungen aufgestellt, die in der bisherigen Diskussion zu deren Schaden oft nicht berücksichtigt wurden. Dazu gehört das hermeneutisch geradezu triviale, aber aus gegebenem Anlaß von Krämer mehrfach wiederholte Postulat, streng zu unterscheiden einerseits zwischen der historischen Frage nach Existenz und Inhalt einer aufgrund der doxographischen Zeugnisse zu erschließenden innerakademischen Lehre Platons, und andererseits dem Problem einer systematischen Wertung eben dieser Inhalte. Die Kritik des philosophischen Inhalts, so Krämer zu Recht (132 f.; 322 ff.), kann keinen Anspruch erheben auf eine Kompetenz bei der Lösung der schwierigen historischen Fragen, die mit der Auswertung der Testimonien verbunden sind; die Feststellung, die Grundgedanken der platonischen Esoterik widersprechen dem systematischen Standort des Kritikers, ist wenig hilfreich bei der Entscheidung über die Authentizität der Überlieferung. Dennoch will Krämer keineswegs den zweiten Schritt der Wertung – von dem nur klar sein muß, daß er den ersten der historischen Rekonstruktion voraussetzt – ausschließen; im Gegenteil: gerade der dritte Teil von Krämers Buch besteht aus dem in dieser umfassenden Form erstmaligen Versuch, die platonische Esoterik in Verbindung zu setzen mit den wichtigsten Strömungen des gegenwärtigen philosophischen Denkens: der analytischen Philosophie, der Transzendentalphilosophie Kantischer oder neukantianischer Prägung, dem Hegelianismus, der Phänomenologie Hus-

<sup>1</sup> H. Krämer, *Platone e i fondamenti della metafisica*, Milano 1982.

<sup>2</sup> Ausgelöst wurde diese Diskussion bekanntlich durch Krämer selbst (Arete bei Platon und Aristoteles, Heidelberg 1959). Eine Sammlung und umfassende Analyse aller Testimonien zu den platonischen *ἄγραφα δόγματα* leistete K. Gaiser, *Platons ungeschriebene Lehre*, Stuttgart 1963, 1968. Ich selber habe in meiner Dissertation ‚Wahrheit und Geschichte. Studien zur Struktur der Philosophiegeschichte unter paradigmatischer Analyse der Entwicklung von Parmenides bis Platon‘, Stuttgart–Bad Cannstatt 1984, 372 ff., ausführlich Stellung genommen zum Problem der ungeschriebenen Lehre Platons, und zwar sowohl zu den philosophischen Fragen der Rekonstruktion als auch zu den philosophischen der Wertung; deshalb erspare ich es mir, an dieser Stelle detailliert anzugeben, warum ich im großen und ganzen der ‚Tübinger Position‘ zustimme.

serls und der Ontologie Heideggers. Krämer sieht es sogar als Ziel seines Buches an (13), Arbeiten in diese Richtung anzuregen – d. h. Studien, die, aufbauend auf den gesicherten Ergebnissen der historischen Rekonstruktion, die Lehrinhalte der *ἄγραφα δόγματα* konfrontieren mit modernen Konzeptionen<sup>3</sup>.

Dieser Anregung will vorliegender Aufsatz folgen, und zwar geht es mir um die Frage nach dem systematischen Sinn eines verhältnismäßig bescheidenen Teilproblems, das in Platons Esoterik abgehandelt wurde: ich meine Platons Konzeption einer Erzeugung der Zahlen aus Einheit und Zweiheit und den damit zusammenhängenden Gedanken einer Reduktion unendlicher Vielheit auf die Zweiheit. Es wird sich zeigen, daß die platonische Auffassung, die auf den ersten Blick archaisch anmutet, weitgehende Entsprechungen findet nicht nur in Hegels Philosophie der Mathematik, sondern gerade in den Überlegungen zu den Grundlagen der Mathematik, die seit der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts teils zu einer Umgestaltung der Mathematik geführt, teils diese Umgestaltung philosophisch auszuwerten versucht haben; ich denke einerseits an Peanos Axiomatik der Arithmetik, andererseits an Brouwers Reflexionen zu dem mathematischen ‚Urphänomen‘ der Zweiheit.

Vorliegender Aufsatz versteht sich übrigens als Pendant zu einem früheren, in dem ich Platons Philosophie der Geometrie in Verbindung gebracht habe mit modernen Entwicklungen<sup>4</sup>; ich werde daher gelegentlich auf ihn zurückgreifen. Zunächst will ich nun einiges Allgemeine zu Platons Philosophie der Mathematik ausführen (I), dann auf die Zeugnisse zur platonischen Konzeption der Generierung der Zahlen eingehen (II) und schließlich diese Konzeption auf ihren mathematischen und philosophischen Gehalt hin auszuwerten versuchen (III).

## I.

Der Versuch, Platons Philosophie der Mathematik mit modernen Vorstellungen in Beziehung zu setzen, befremdet unwillkürlich; denn wenn auch der naive Glaube an einen linearen Fortschritt in der Philosophie heute nicht mehr so verbreitet ist, daß das Anliegen, einen Hegel, aber auch einen Aristoteles oder Platon unter mehr als bloß historischer Fragestellung ernst nehmen zu wollen, auf prinzipielle Mißbilligung stößt, so läßt sich doch sagen, daß tendenziell jene Bereiche der Philosophie,

<sup>3</sup> S. auch *K. v. Fritz*, Zur Frage der „esoterischen“ Philosophie Platons, in: *Schriften zur griechischen Logik*, 2 Bde., Stuttgart/Bad Cannstatt 1978, I, 215–227, 219, Anm. 1, wo die philosophische Auswertung der bisherigen philologischen Rekonstruktionen gerade im Bereich von Platons esoterischer Philosophie der Mathematik als ein wichtiges Desiderat bezeichnet wird.

<sup>4</sup> *V. Höhle*, Platons Grundlegung der Euklidizität der Geometrie, in: *Ph.* 126 (1982) 180–197.

die sich direkt mit den Einzelwissenschaften überschneiden, also etwa Naturphilosophie oder Philosophie der Mathematik, gewöhnlich in dem Maße als überholt gelten, in dem die damals zeitgenössischen Wissenschaften überholt worden sind. Auch wenn einiges an dieser Auffassung wahr sein sollte (aber es bleibt zu bedenken, daß eine Naturphilosophie, die diesen Namen verdient und nicht bloß eine populäre Zusammenfassung zeitgenössischer wissenschaftlicher Ergebnisse darstellt, insofern sie auf Begriffe reflektiert, die den empirischen Wissenschaften vorausliegen, einer Relativierung durch deren Wandel aus logischen Gründen enthoben ist<sup>5</sup>), so kann dies freilich nur bedeuten, daß die platonischen Reflexionen zur Mathematik aller Wahrscheinlichkeit nach von sachlichem Interesse sind: denn die griechische Mathematik hat bekanntlich zur Zeit Platons Fragestellungen gekannt, die zum Teil erst Ende des letzten Jahrhunderts wieder verfolgt wurden. Ich meine damit nicht so sehr den materialen Reichtum von Euklids *Στοιχεῖα* – etwa die auf Theaitetos zurückgehende Behandlung der Irrationalitäten im X. Buch und die Theorie von den fünf regelmäßigen Körpern im XIII. Buch –; ich meine eher die äußerste Präzision im Beweisen und das Interesse an Grundlagenfragen, d. h. die axiomatische Tendenz. Nach B. Russell gibt es zwei Richtungen mathematischer Forschung: einerseits die übliche, konstruktive, die „zu einer Schritt für Schritt sich steigernden Komplikation“ führt; andererseits jene, die „analytisch zu immer größerer Abstraktion und logischer Einfachheit fort(schreitet). Sie fragt nicht, was man aus den ursprünglichen Grundannahmen definieren und ableiten kann, sondern was für allgemeinere Begriffe und Prinzipien gefunden werden können, durch die unser Ausgangspunkt definiert oder abgeleitet werden kann. Die Verfolgung dieser umgekehrten Richtung charakterisiert die mathematische Philosophie im Gegensatz zur gewöhnlichen Mathematik.“<sup>6</sup>

Studien in eben diese zweite Richtung wurden in der Akademie besonders gepflegt: Zeugnis dafür ist erstens die Eudoxische Proportionenlehre im V. Buch, die an Allgemeinheit die Dedekindsche Theorie der Schnitte noch übertrifft<sup>7</sup>, und zweitens die Tatsache, daß in der Akade-

<sup>5</sup> Ich denke an Platons Materiebegriff, der ja gerade durch die Quantenphysik eine bedeutende Aktualisierung erfahren hat (s. *W. Heisenberg*, Physik und Philosophie, Stuttgart 1959, 51–60; *ders.*, Der Teil und das Ganze, München 1979, 277–288; grundlegend zu Platons Materiebegriff übrigens: *D. J. Schulz*, Das Problem der Materie in Platons Timaios, Bonn 1966), aber etwa auch an Aristoteles' Teleologiebegriff (s. *W. Kullmann*, Die Teleologie in der aristotelischen Biologie, Heidelberg 1979).

<sup>6</sup> *B. Russell*, Einführung in die mathematische Philosophie, Darmstadt/Genf o. J., 11. – Vgl. damit Pl. R. 510b 4ff.

<sup>7</sup> R. Dedekinds klassische Abhandlung ‚Stetigkeit und irrationale Größen‘ erschien 1872 (jetzt in: *R. Dedekind*, Gesammelte mathematische Werke, Braunschweig 1930–1932, III, 315–334). Ihre Originalität – die Dedekind etwa gegen Lipschitz verteidigte (s. ‚Aus Briefen an R. Lipschitz‘, s. in dieser Anm. weiter oben: III, 464–482, bes. 469 ff.) – liegt in der Beschränkung auf Zahlen und in der expliziten Setzung der Existenz (mit Dedekinds Terminus:

mie offensichtlich die Möglichkeit nicht-euklidischer Geometrie diskutiert wurde. Jedenfalls entdeckte I. Tóth<sup>8</sup> im Corpus Aristotelicum zahlreiche Stellen, die heute Sätze der nicht-euklidischen Geometrie sind; durch eine sorgfältige Interpretation gelang es ihm nachzuweisen, daß diese Stellen Relikte sind des Versuchs, das Parallelenpostulat indirekt zu beweisen; eben die Einsicht in das notwendige Scheitern dieses Versuches führte schließlich zu dem bekannten Ergebnis, daß innerhalb der Postulate des ersten Buches von Euklid das Parallelenpostulat als eigenes Axiom aufgestellt wurde: „Die ‚communis opinio‘, das Parallelenproblem sei aus Mangel an Evidenz des Parallelenpostulats entstanden, erscheint nach obigen Ausführungen historisch unhaltbar; im Gegenteil: die Notwendigkeit der Überwindung des bereits bestehenden Parallelenproblems *erforderte* die Einführung des Parallelenpostulats“ (Geometria more ethico, op. cit. 399). Ich selber habe, in Anschluß an Tóths Arbeiten, in „Grundlegung“ zu zeigen versucht, daß sich nicht nur bei Aristoteles, sondern schon bei Platon (R. 509dff, Cra. 436d) Stellen finden, die nur durch die Entdeckung der mathematischen Möglichkeit einer nicht-euklidischen Geometrie sich erklären lassen. Das philosophisch Interessante an dieser Entdeckung ist nun offensichtlich, daß Platon der erste in der Geschichte der Philosophie ist, der erkannt hat, daß die Mathematik aus sich heraus prinzipiell nicht letztbegründet werden kann, insofern das Kriterium formaler Konsistenz die Bildung entgegengesetzter Systeme erlaubt. Dies mag uns heute trivial erscheinen. Aber es sei daran erinnert, daß die Auffassung, daß Konsistenz in der Mathematik nicht schon die einzig mögliche Wahrheit garantiere, noch für einen so großen Mathematiker und Philosophen wie Leibniz absurd gewesen wäre; die moderne Mathematik, aber eben auch schon Platon kommen hingegen in dem Akzeptieren dieser Auffassung überein. Was die philosophische Bedeutung dieser Entdeckung angeht, so kann sie, denke ich, kaum überschätzt werden; letztlich ergibt sich aus ihr die prinzipielle Defizienz

---

‚Schöpfung‘) der irrationalen Zahlen, während Eudoxos gerade die Frage der Existenz auf generale Weise ausschaltet. S. dazu die den Kern treffenden Ausführungen von G. Peano, in ‚Definitione de numeros irrationale secundo Euclide‘ (Opere scelte, 3 Bde., Roma 1957–1959, III, 385–388), der einerseits auf die Entsprechungen zwischen Euklid V und Dedekind verweist (387: „Isto divisione es vocato sectione [Schnitt ab Dedekind in 1872]“), andererseits aber zu Recht hervorhebt: „Quod non es scripto in Euclide, es existencia de irrationales“ (388; die Sprache, in der Peano schreibt, ist übrigens die von ihm begründete Interlingua ‚latino sine flexione‘). – Allerdings kann man durchaus gerade in der größeren Allgemeinheit der eudoxischen Theorie einen Vorrang vor Dedekind sehen: s. H. Hassel/H. Scholz, Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik, Charlottenburg 1928, 24 f. (17 und 24 wird übrigens darauf verwiesen, daß Eudoxos – anders als noch Dedekind und 2250 Jahre vor Hilbert – seine Verhältnisse implizit definiert).

<sup>8</sup> Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum, in: Arch. Hist. Exact Sci. 3 (1967) 249–422 (zustimmend zitiert etwa von K. v. Fritz, Der Ursprung der Wissenschaft bei den Griechen, in: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft, Berlin/New York 1971, 1–334, 209, Anm. 435); Geometria more ethico, in: ΠΙΣΜΑΤΑ, Festschrift für W. Hartner, hrsg. von Y. Maeyama und W. G. Saltzer, Wiesbaden 1977, 395–415.

einer jeden Form von Philosophie, die sich die mathematische Methode zum Vorbild nimmt. Freilich ist Platon nicht deswegen schon zum Skeptiker geworden; Platon ist keineswegs der Ansicht, daß das Versagen der mathematischen Methode bedeuten solle, daß für die Philosophie nunmehr jede beliebige Assoziation gleichermaßen relevant sei; im Gegenteil: die einzig der Philosophie gemäße Methode kann nur eine sein, die noch stringenter ist als die der Mathematik – und d. h. einerseits ebenso wie sie darauf verzichtet, sich auf empirisch und anschaulich Gegebenes zu berufen, andererseits aber in ihrer logischen Struktur ein ἀνυπόθετον (R. 511b), ein nicht mehr als Voraussetzung zu Bezeichnendes, weil Letztbegründendes und Letztbegründetes zu ihrem Zentrum hat. Dieses unhintergehbare Fundament ist nach Platon, wie ich an anderer Stelle ausführlich gezeigt habe, das sich im Denken der Prinzipien und höchsten Ideen reflexiv letzt-, weil selbstbegründende Denken des Denkens<sup>9</sup>.

Es ist hier nicht der Ort, die Möglichkeit oder gar Notwendigkeit eines solchen Denkens zu diskutieren<sup>10</sup>; es geht mir hier nur um die Anerkennung des simplen historischen Sachverhalts, daß der Begründer der abendländischen Metaphysik als Proprium der Philosophie die Möglichkeit von Letztbegründung angesehen hat, eine Möglichkeit, die nach ihm auch der Mathematik grundsätzlich versagt ist. Freilich ist für Platon die mathematische διάνοια mit ihrem Übersteigen der sinnlichen Erfahrung genetische Bedingung und unverzichtbare Vorstufe für den philosophischen νοῦς; in der Tat läßt sich Platons Vernunftpathos psychologisch kaum verstehen ohne das Wahrheitserlebnis, das offensichtlich die Mathematik für ihn bedeutet hat. Auch wenn die berühmte Anekdote, vor dem Eingang der platonischen Akademie sei Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσέλτω zu lesen gewesen, wohl eine spätere Erfindung darstellt<sup>11</sup>, so handelt es sich doch um eine sehr gute Erfindung; das Bildungsprogramm der ‚Politeia‘ (bes. 536d ff.) entspricht dem ja völlig. Allein aus dieser Stelle ergibt sich übrigens, daß gerade nach Platons Selbstverständnis die Kenntnis der mit ihm zeitgenössischen Mathematik eine unabdingbare Voraussetzung für das Verstehen seiner Philosophie ist – eine Kenntnis,

<sup>9</sup> Höfle, Wahrheit u. Geschichte II, 397 ff. Behandelt sind dort der ‚Theaitet‘ (bes. 196 d f, 199 d ff), der ‚Charmides‘ (bes. 166 c, 169 a), Euthd. 292 d f, R. 582 d f und Plt. 304 b f.

<sup>10</sup> Es ist überraschend, mit welcher Hartnäckigkeit sich das als Hauptargument gegen ein solches Denken fungierende sog. Münchhausentriemmas hält (das ja – was oft nicht bekannt ist – nicht nur auf den antiken Hellenismus zurückgeht, sondern sogar schon in der platonischen Akademie in einer Rohform diskutiert wurde: s. Höfle, Wahrheit u. Geschichte 633 ff., 656 ff.), obwohl seine Inkonsistenz doch so leicht zu durchschauen ist. Denn aus ihm selbst folgt ja, daß es offensichtlich eine Voraussetzung hat, und zwar eben diejenige, daß es nur ein Denken gebe, das von unbeweisbaren Axiomen ausgeht. Damit reduziert sich das Triemmas auf die banale, allen Vertretern der Möglichkeit einer Letztbegründung zur Genüge geläufige Tautologie, daß es, unter der Voraussetzung, daß nur axiomatisches Denken möglich sei und es somit keine Letztbegründung gebe, keine Letztbegründung gebe. Immerhin bleibt es als ein Verdienst des Triemmas anzuerkennen, daß es, wenn es nur reflektiert würde, selbst ein Garant für die Möglichkeit voraussetzungslosen Denkens wäre.

<sup>11</sup> Vgl. Gaiser 446 f.

die von Mathematikhistorikern wie O. Toeplitz, O. Becker u. a. in den 20er und 30er Jahren dieses Jahrhunderts entscheidend gefördert wurde, doch heutzutage in zahlreichen philosophischen Stellungnahmen zu Platon in beklagenswertem Maße vermißt werden muß. Zu Recht konnten bereits H. Hasse und H. Scholz in ihrer schon zitierten Untersuchung bemerken, daß, „wenn man von einem Platoniker auch heute noch, als Vorbedingung jedes Bekenntnisses zu Plato, den mathematischen Hochschulkurs verlangte, den Plato für die Zulassung zur Akademie gefordert hat, ... die Zahl der Platoniker gar sehr zusammenschumpfen“ würde (op. cit. 4).

Dennoch – so falsch es ist, die Bedeutung der Mathematik für die platonische Philosophie zu unterschätzen – : die oben angeführten Reflexionen Platons aus dem Liniengleichnis zeigen auch, daß es nicht minder verfehlt wäre, in Platon den ersten Denker zu sehen, der die Philosophie auf der Mathematik aufbauen wollte. So ist es z. B. mißverständlich, wenn Gaiser von einer „universalen ‚Mathematisierung‘ des philosophischen Denkens“ durch Platon spricht (294; Original kursiv)<sup>12</sup>; man muß bei Platon viel eher an eine Ontologisierung der Mathematik als an eine Mathematisierung der Ontologie denken. Denn für Platon kann nicht die Mathematik die Ontologie begründen (wenn sie auch, in der Bewegung der  $\alpha\nu\delta\omicron\varsigma$ , auf die höchsten Prinzipien verweisen kann), sondern nur die Ontologie die Mathematik. „Grundlegung“ 190 ff. habe ich jedenfalls versucht zu zeigen, daß Platon das mathematisch verwirrende Ergebnis, daß mehrere Geometrien konsistent möglich sind, wohl durch eine ontologische Lösung zu beseitigen sich bemüht hat: die euklidische Geometrie sei wahr nicht aus mathematischen Gründen und auch nicht, weil sie anschaulicher sei (ganz davon abgesehen, daß dies nicht stimmt, implizierte ein derartiges Argument für Platon den Verlust der Wissenschaftlichkeit der Geometrie), sondern weil in ihr der rechte Winkel die Rolle des Maßes spiele<sup>13</sup>. Der rechte Winkel ist nun, weil es nur einen einzigen solchen gibt, dem  $\xi\nu$ , also dem positiven Prinzip aus Platons esoterischer Prinzipientheorie, zugeordnet, während die unbeschränkte Vielheit spitzer und stumpfer Winkel auf das  $\mu\acute{\epsilon}\gamma\alpha\text{-}\mu\iota\kappa\rho\nu\nu$ , also die in ein Zuviel und Zuwenig<sup>14</sup> gespartene  $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$  weist<sup>15</sup>: die euklidische Geometrie

<sup>12</sup> Ähnlich ist Krämers scharfe Entgegensetzung von platonischer und Hegelscher Philosophie der Mathematik (z. B. *Krämer*, *Platone* 325 f.) nur sehr bedingt richtig; in gewissem Sinne muß man nämlich sagen, daß für Platon ebenso wie für Hegel die Mathematik als nicht philosophisch gilt (wenn auch natürlich nicht als antiphilosophisch). Zu Platon und Hegel s. unten 339 ff.

<sup>13</sup> In der euklidischen Geometrie hat ja bekanntlich z. B. ein Dreieck eine Winkelsumme von  $180^\circ$ , in der elliptischen von mehr als  $180^\circ$ , in der hyperbolischen von weniger als  $180^\circ$ .

<sup>14</sup> Es kann hier daran erinnert werden, daß die platonischen Termini für das Zuviel und Zuwenig,  $\xi\lambda\lambda\epsilon\iota\upsilon\varsigma$  und  $\upsilon\pi\epsilon\rho\chi\acute{\eta}$  (bzw.  $\upsilon\pi\epsilon\rho\beta\omicron\lambda\acute{\eta}$ ), sonst aus mathematischem Zusammenhang bekannt sind, nämlich als Kegelschnitte; zwischen sie gehört die Parabel, nach der F. Klein die euklidische Geometrie ‚parabolische Geometrie‘ benannte.

<sup>15</sup> Vgl. Test. 37 *Gaiser*. Das Weiterwirken dieses Gedankens z. B. bei Aristoteles, Heron

soll daher als die Geometrie des ontologisch überlegenen Prinzips die wahre sein.

Die Begründung dieser Option wird uns inhaltlich gewiß nicht befriedigen<sup>16</sup>; das Große und Moderne an ihr ist aber die entschiedene Anti-Stellung zu Versuchen, die Geometrie aus der Anschauung zu begründen; zudem ist es nicht a priori unsinnig, nach Strukturen zu suchen, die im Sinne einer (dialektischen) Ontologie ein geometrisches System vor anderen auszeichnen<sup>17</sup>. Jedenfalls wird man historisch dies festhalten können, daß es Platons Anliegen war, die Axiome der Geometrie, die diese unhinterfragt und für sie unhinterfragbar voraussetzen muß, prinzipientheoretisch zu begründen<sup>18</sup>.

und neuplatonisierenden Mathematikern wie Theon, Jamblich, Proklos hat Ž. Marković nachgewiesen (Platons Theorie über das Eine und die unbestimmte Zweierheit und ihre Spuren in der griechischen Mathematik, in: Zur Geschichte der griechischen Mathematik, hrsg. von O. Becker, Darmstadt 1965, 308–318); ich selber habe gezeigt, daß diese Konzeption sich noch bei Cusanus und Hegel findet (Höfle, Grundlegung 190). – Ganz analog parallelisierte Platon gerade Linien wegen der Unendlichkeit ihrer Länge mit der  $\delta\upsilon\alpha\varsigma$ , kreisförmig geschlossene Kurven hingegen wegen ihrer Endlichkeit mit dem als  $\pi\epsilon\rho\upsilon\varsigma$ , als Grenze fungierenden  $\xi\nu$  (vgl. Test. 38 Gaiser). – Zu weiteren prinzipientheoretischen Interpretationen mathematischer Strukturen s. Gaiser 54 ff.

<sup>16</sup> Immerhin findet sich ein letztlich äquivalenter Gedanke noch bei F. A. Taurinus (Theorie der Parallellinien, Köln 1825), der, trotz der Einsicht in die mathematische Möglichkeit einer hyperbolischen Geometrie, für die euklidische optiert, und zwar nicht so sehr weil diese anschaulicher sei (86), sondern wegen der Tatsache, daß die hyperbolische Geometrie, um bestimmt zu sein, eine willkürlich anzunehmende Konstante erfordert und somit unzählig viele hyperbolische Systeme möglich sind, während es nur eine euklidische Geometrie gibt (89 ff; Stellen zitiert nach O. Becker, Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Frankfurt 1975, 183 ff.).

<sup>17</sup> So hat kürzlich D. Wandschneider in Anlehnung an Hegels Naturphilosophie und in Absetzung von allen Versuchen, die in diesem Zusammenhang auf Anschauung rekurrieren, einige ontologische, dialektisch-logische Argumente für die Dreidimensionalität des natürlichen Raumes angeführt (Raum, Zeit, Relativität, Frankfurt 1982, 55 ff; s. auch 49 ff.). Es schiene mir durchaus sinnvoll zu untersuchen, ob nicht über die Dimensionenzahl hinaus (die ja, um eine Trivialität zu sagen, mit Euklidizität oder Nicht-Euklidizität des Raumes nichts zu tun hat) auch zur inneren Struktur dieses dreidimensionalen Raumes einiges „aus dem Begriff“ zu sagen wäre; ich denke daran, ob nicht der elliptische Raum (und unser physikalischer Raum ist ja möglicherweise elliptisch) aus kategorialen Gründen – etwa wegen seiner Endlichkeit wie auch wegen bestimmter Symmetrieeigenschaften – dem euklidischen und gar hyperbolischen vorzuziehen wäre.

<sup>18</sup> W. Wieland, Platon und die Formen des Wissens, Göttingen 1982, behauptet in seiner Interpretation des Liniengleichnisses: „Der Dialektiker hat nicht die Aufgabe, die Hypothese des Mathematikers zu sichern.“ (216) Freilich wäre eine Auseinandersetzung mit dieser seiner Interpretation dann reizvoller, wenn Wieland sich die Mühe gemacht hätte, auch diejenigen Zeugnisse der esoterischen Lehre zu behandeln, die ganz offensichtlich in eine andere Richtung weisen (s. oben Anm. 15); Ignorieren kann Argumentieren nicht ersetzen. (Zu Wielands Platonbuch s. jetzt Krämers kritische Rezension in: RFNS 74 [1982] 579–592). Es ist ja evident, daß Platon die mathematischen Axiome nicht prinzipiell, sondern nur für die Mathematik selbst für unbegründbar hält (das  $\xi\omega\varsigma$  R. 533 c1 ist eindeutig). Zudem übersieht Wieland die bei Platon wesentliche Kontinuität der Erkenntnisvermögen, die durch das jeweils übergeordnete fundiert werden (so also die mathematische  $\delta\iota\alpha\nu\omicron\iota\alpha$  durch den philosophischen  $\nu\omicron\upsilon\varsigma$ ) und nicht unvermittelt aufeinanderfolgen. Für die Mathematik als Mathematik wären die Reflexionen, die nach Wieland die Philosophie vor ihr auszeichnen, herzlich uninteressant; wären sie das von Platon Intendierte, bliebe rätselhaft, wieso Platon das Programm einer philosophischen Einheitswissenschaft entwerfen konnte. – Anders als Wieland, hat kürzlich auch W. Burkert den Anspruch der platonischen Philosophie, „als umfassende

## II.

Die Arithmetik und Zahlentheorie hat zur Zeit Platons wohl keine Grundlagenkrisis gekannt; die mathematische Wissenschaft, die im Zentrum des Liniengleichnisses steht, ist daher eindeutig die Geometrie<sup>19</sup>. Dennoch ist auch die Arithmetik für Platon begründungsbedürftig; neben den drei Winkelarten und den geometrischen Figuren werden die Begriffe ‚gerade‘ und ‚ungerade‘ genannt, die die Mathematik qua Arithmetik voraussetze (510c2 ff.). „Grundlegung“ 188 f. habe ich freilich nachzuweisen versucht, daß es nicht eigentlich Begriffe sein können, die Platon mit dem Terminus ὑποθέσεις meint; es geht wohl vielmehr um Sätze, in denen die Existenz der diesen Begriffen entsprechenden Entitäten behauptet wird.

Was muß nun die Arithmetik axiomatisch voraussetzen? Denken wir an die heutige Fassung der Arithmetik, so sind ihre Voraussetzungen in den fünf sogenannten Peano'schen Axiomen enthalten, die die Existenz der Reihe der natürlichen Zahlen garantieren. In der Tat ist das Faktum, daß es natürliche Zahlen gibt, mit mathematischen Mitteln unbeweisbar; ihre Existenz kann nur axiomatisch gesetzt werden. In diesem Sinne wird man sagen können, daß die platonische Konzeption einer Erzeugung der Zahlen nichts anderes intendierte, als eine philosophische Begründung zu geben für die Existenz der natürlichen Zahlen. Immerhin ist dies auch mathematikhistorisch gesehen bemerkenswert; denn bekanntlich kennen ja die drei arithmetischen Bücher Euklids (VII–IX) zwar Definitionen, aber nicht Axiome – anders als die geometrischen Bücher, in deren erstem an die Definitionen, z. B. des Kreises (Eukl. I def. 5), sich Postulate anschließen, die die Existenz der meisten der definierten Gebilde sicherstellen sollen (im Fall des Kreises post. 3). Dem liegt die durchaus richtige Einsicht zugrunde, daß Definitionen als solche noch nicht Existenz garantieren. Im Buch VII wird man hingegen Postulate vergeblich suchen<sup>20</sup>; und bekanntlich ist in der Mathematikgeschichte diese Lücke erst Ende des letzten Jahrhunderts durch eine Axiomatisierung der Arithme-

---

Wissenschaftslehre, die Grundlagen auch der Arithmetik und Geometrie zu sichern“ hervorgehoben und die „platonische Philosophie als Meta-Mathematik“ bezeichnet (Konstruktion und Seinsstruktur: Praxis und Platonismus in der griechischen Mathematik, in: Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft 34 [1982] 125–141, 132). Allerdings meint Burkert, es werde von Platon „auch nicht ansatzweise gezeigt“, „wie dies im einzelnen sich ereignet und wieso dabei eindeutige Ergebnisse gewonnen werden“ (133). Hösle, Grundlegung, und vorliegender Aufsatz versuchen, Platons inhaltliche Vorstellungen über diese Begründung zu rekonstruieren.

<sup>19</sup> Vgl. Hösle, Grundlegung 188 mit Verweis auf R. 510b3 ff., d5 ff., 511 d2 ff.

<sup>20</sup> Noch in Proklos' Euklidkommentar heißt es, daß Postulate etwas Geometriespezifisches seien (182, Z. 7 Friedlein: ὅτι τὰ μὲν ἴδια τῆς γεωμετρικῆς ἐστὶν ὕλης) während die κοινὰ ἔννοια auch von der Arithmetik vorausgesetzt würden. – Die von Th. Heath angeführten, von Euklid für die Arithmetik implizite vorausgesetzten Axiome (The Thirteen Books of Euclid's Elements, 3 Bde., New York 1956, II 294) – z. B. über die Transitivität der Meßrelation – garantieren übrigens ebenfalls nicht die Existenz der natürlichen Zahlen.



tik geschlossen worden. Noch bei Descartes, dessen analytische Geometrie der Tendenz zur ‚Arithmetisierung der Geometrie‘ zum Durchbruch verhalf, vermißt man diese Axiomatisierung.

Ich denke nun, daß Platons Programm einer ‚Erzeugung‘ der Zahlen letztlich diese Lücke füllen wollte; und wenn auch die Durchführung, auf die ich gleich eingehen werde, im einzelnen nicht befriedigen kann, so bleibt es doch eine ungeheure Leistung, ca. 2200 Jahre vor Dedekind und Peano dieses Begründungsdesiderat erkannt zu haben<sup>21</sup>. Freilich ist ein Unterschied nicht zu übersehen: Platon will mehr als die moderne Mathematik; die erforderlichen Axiome sollen nämlich nicht nur aufgestellt, sondern aus der Prinzipientheorie hergeleitet werden. Aber noch ein weiteres an Platons Versuch einer Begründung der Arithmetik erinnert an die Moderne: die absolute Autonomie der Arithmetik innerhalb der mathematischen Wissenschaften. Bekanntlich ist auch diese Autonomie erst Ende des letzten Jahrhunderts allgemein anerkannt worden; die Originalität Dedekinds besteht gerade in der entschiedenen Ablehnung aller Versuche, die bei der Begründung der Arithmetik (oder der Analysis) auf geometrische Vorstellungen zurückgreifen<sup>22</sup>. Diese Tendenz hat sich zu Recht im 20. Jahrhundert durchgesetzt; und daß sie Euklids Konzeption widerspricht, zeigt sich schon an der äußerlichen Tatsache, daß bei ihm die arithmetischen Bücher (VII–IX mit X, das über die Irrationalitäten handelt) zwischen den planimetrischen (I–VI) und den stereometrischen (XI–XIII) stehen. Zu dieser Ordnung Euklids steht nun aber die platonische in Gegensatz, die man im siebten Buche der ‚Politeia‘ findet (524d ff.): dort besteht ja das quinquivium (in dieser Reihenfolge) aus Arithmetik, Geometrie, Stereometrie und den beiden ‚angewandten‘ mathematischen Wissenschaften Astronomie und Harmonie; die Arithmetik ist führend, weil im Begriff der Zahl sich die Dialektik der Prinzipien in deutlichster Weise manifestiert (524 dff). Allgemein sind nach Platon die geometrischen Entitäten komplexer als die arithmetischen; im bei Simplicios überlieferten Alexanderreferat aus *Περὶ τὰ γὰθοῦ* etwa heißt es unmißverständlich, daß die Zahl die erste mathematische Entität sei, während die Punkte Einheiten (Monaden) seien, die örtlich bestimmt

<sup>21</sup> Ganz in diesem Sinne, allerdings etwas zögernd hat schon O. Toeplitz auf diesen Sachverhalt aufmerksam gemacht. So heißt es in seinem grundlegenden Aufsatz ‚Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Plato‘ (1929; jetzt in: Zur Geschichte der griechischen Mathematik [Anm. 15] 45–75): „Als nämlich Vieta und Descartes die Loslösung von der geometrischen Redeweise der Griechen vollzogen, haben sie es unterlassen, für die Rechen Dinge nach dem Muster der geometrischen Axiome der Griechen ein Axiomensystem zu errichten, und diesen Schritt, die ‚Axiomatisierung‘ der Arithmetik, hat erst das endende 19. Jahrhundert nachgeholt“ (73), und gleich darauf: „Möglicherweise ist es ... Plato selbst, der diese Axiomatisierung vollzogen hat, und vielleicht weist das am Ende von Buch VI des Staats aufgestellte Programm über das Wesen mathematischer Forschung bereits in diese Richtung.“ (74) Freilich fehlen genauere Ausführungen.

<sup>22</sup> Das ist der Tenor von ‚Stetigkeit und irrationale Größen‘ (Anm. 7) sowie ‚Was sind und was sollen die Zahlen?‘ (1888; ebd. III, 335–391).

seien (τὰ δὲ σημεῖα εἶναι μονάδας θεῖσιν ἐχούσας, Test. 23 b *Gaiser*). In dieser Priorität der Zahlen vor den Grundbegriffen der Geometrie muß man, wie gesagt, eine erstaunliche Modernität Platons sehen; denn mit dieser Konzeption, mit der Platon zu seiner Zeit wohl alleine stand, ist er der neuzeitlichen Mathematik näher gekommen als selbst Eudoxos. Natürlich hat auch Platon, wie nahezu die ganze Antike, den Zahlbegriff auf natürliche Zahlen beschränkt; aber ich werde noch zeigen, daß eine Tendenz zu einem nicht-geometrischen Verständnis selbst der Irrationalitäten in Platons Philosophie der Zahlen eher liegt als in der sonstigen griechischen Mathematik.

Auch auf diesen Punkt hat schon Toeplitz aufmerksam gemacht, ohne daß er übrigens bisher genügend rezipiert worden ist; am Ende seines schon genannten Aufsatzes schreibt er zu Recht, daß die Versuche Taylors<sup>23</sup>, die ἀόριστος δυνάς mit irrationalen Werten in Verbindung zu bringen, an die er ja kritisch anknüpft, von weittragender Bedeutung für die antike Mathematikgeschichte sein müßten: „Gilt die These oder auch nur die in ihr liegende Tendenz, so besagt dies allerdings sehr viel für die griechische Mathematik. Es besagt, daß Plato im Begriff war, sie in einem aus dem Euklid nicht unmittelbar zu erkennenden Maße irgendwie zu dem heutigen Zahlbegriff hinzuführen, und es besagt weiter, daß Aristoteles mit seinem Kampf dagegen die griechische Mathematik von diesem Wege abgedrängt hat.“ (op. cit. 52 f) Es überzeugt, daß Toeplitz Aristoteles dafür verantwortlich macht, die platonische Konzeption abgewürgt zu haben (freilich wird man auch an Eudoxos denken); sie folgt aus der prinzipiellen aristotelischen Ablehnung der platonischen Philosophie der Mathematik, die in vielem verhängnisvoll gewesen ist; so ist in Platons Programm einer Quantifizierung der Qualitäten im ‚Timaios‘ (53 cff) wohl der entscheidende Grundgedanke der modernen Naturwissenschaft im Kern ausgesprochen, die sich dieser gar nicht so selbstverständlichen Konzeption einer Mathematisierung der natürlichen Welt nicht minder verdankt als einem systematischen Experimentieren, das freilich Platon noch fernlag (Ti. 68 d)<sup>24</sup>. Indem nun Aristoteles die platonische Reihenfolge der Wissenschaften Metaphysik → Mathematik → Physik umgewandelt hat in Metaphysik → Physik → Mathematik (s. etwa Metaph. K7 vs. E1), hat er, mit dem Verlust einer Autonomie der Mathematik, eben diese Möglichkeit einer Mathematisierung der Natur preisgegeben<sup>25</sup>; und es

<sup>23</sup> Forms and Numbers, a study in Platonic metaphysics, in: *Mind* 35 (1926) 419–440 und *Mind* 36 (1927) 12–33.

<sup>24</sup> Daß der modernen Naturwissenschaft gerade nicht in erster Linie ein unreflektierter Empirismus, sondern mindestens in gleichem Maße ein modifizierter Platonismus zugrunde liegt, wäre nicht schwer zu zeigen; hier sei nur daran erinnert, daß etwa auch Cusanus' bahnbrechende Forderung nach einer Quantifizierung und Metrisierung z. B. von Medizin und Chemie im ‚Idiota de staticis experimentis‘ die Forderung eines Platonikers war. Zu einer Interpretation der Wissenschaftsgeschichte vor dem Hintergrund des Platonismus s. etwa C. F. v. Weizsäcker, *Platonische Naturwissenschaft im Laufe der Geschichte*, Göttingen 1971.

<sup>25</sup> S. nur Metaph. 1092 b 15 ff.

läßt sich nicht anders urteilen, als daß diese Preisgabe (die etwa bei Epikur besiegelt ist<sup>26</sup>) einen Rückschritt auf dem Wege zur neuzeitlichen Wissenschaft bedeutet. Offensichtlich ist aber mit dieser Unterordnung der Mathematik unter die Physik eine Option für die Geometrie gegeben; sind es doch Körper und Größen, nicht Zahlen, die, als bewegte, Gegenstand der Physik sind<sup>27</sup>. Dagegen ist bei Platon, wie wir gesehen haben, die Arithmetik der Geometrie vorgeschaltet; die ‚Erzeugung‘ der Zahlen kann sich daher nicht geometrischer Vorstellungen bedienen.

Ist einmal anerkannt, daß Platons Anliegen einer Generierung der Zahlen nicht eine Abstrusität, sondern vielmehr eine die mit ihm zeitgenössische Mathematik überragende Konzeption darstellt, so kann nun auf seine konkreten Vorstellungen eingegangen werden. Zunächst will ich diejenigen Stellen diskutieren, die sich in den Dialogen finden; wie sich zeigen wird, handeln diese freilich nicht von der ‚Erzeugung‘ der Zahlen, sondern von der ontologischen Fundierung der wichtigsten Zahlprädikate. Die Konzeption der Generierung der Zahlen hat Platon offensichtlich der ungeschriebenen Lehre vorbehalten.

R. 510c3 waren als (philosophisch zu begründende) Grundbegriffe der Arithmetik περιττὸν καὶ τὸ ἄρτιον, also Ungerade und Gerade, angegeben worden (und zwar sind diese Begriffe, dem oben Ausgeführten entsprechend, *vor* den Grundbegriffen der Geometrie genannt); wie jeder, der Euklid auch nur in der Hand gehabt hat, weiß, sind es ja diese Begriffe, die im letzten der zahlentheoretischen Bücher am häufigsten als Prädikate zur Charakterisierung der verschiedenen natürlichen Zahlen verwendet werden; diese dyadische Arithmetik ist dabei altpythagoreisch<sup>28</sup>. Im ‚Parmenides‘ findet sich nun eine Stelle, die zu dem Pro-

<sup>26</sup> S. Höhle, Wahrheit und Geschichte 644 ff.

<sup>27</sup> Vgl. De cael. 268 a 1 ff.: Ἡ περὶ φύσεως ἐπιστήμη σχεδὸν ἢ πλείστη φαίνεται περὶ τὰ σώματα καὶ μεγέθη καὶ τὰ τούτων οὐσα πάθη καὶ τὰς κινήσεις ...

<sup>28</sup> Die zahlentheoretischen Bücher Euklids haben nicht das Niveau der übrigen; als besonders bemerkenswert seien aber hier genannt die Sätze IX 20 und IX 36. IX 20 beweist, daß es unendlich viele Primzahlen gibt (aus einer endlichen Menge von Primzahlen  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$  läßt sich  $q = \prod p + 1$  bilden, wobei  $q \equiv 1 (p)$  und somit entweder selbst prim ist oder das Produkt nicht in  $P$  enthaltener Primzahlen darstellt); IX 36 zeigt, daß Zahlen der Struktur  $N = 2^t (2^{t+1} - 1) - z$ . B. 6, 28, 496 – vollkommen, d. h. die Summe ihrer *echten* Teiler sind, wenn der Klammerausdruck prim ist (die Summe *aller* Teiler von  $N$  ist ja offensichtlich  $(1 + 2^1 + \dots + 2^t) \cdot (1 + (2^{t+1} - 1))$ , also  $(2^{t+1} - 1) \cdot 2^{t+1} = 2N$ ). – Übrigens sind zahlreiche an diese Sätze sich unmittelbar anschließende Probleme bis heute ungelöst – so etwa, ob es auch unendlich viele Primzahlzwillinge ( $p_1; p_2 = p_1 + 2$ ) gibt oder ob die Umkehrung von IX 36 allgemein gilt: Zwar bewies Euler, daß gerade vollkommene Zahlen notwendig von der genannten Struktur sind (die Summe der Teiler einer geraden Zahl  $N = 2^t \cdot u$  [wobei  $u$  eine ungerade natürliche Zahl ist] ist das Produkt von  $2^{t+1} - 1$  und der Summe der Teiler des ungeraden Faktors [im folgenden geschrieben als  $\sigma(u)$ ]; das ist aber, wenn die Zahl vollkommen ist,  $= 2N$ , also  $(2^{t+1} - 1) \cdot \sigma(u) = 2^{t+1} \cdot u$ ; daraus folgt, daß  $\sigma(u) = a \cdot 2^{t+1}$  und  $u = a \cdot (2^{t+1} - 1)$ ; nun ist  $u$  somit sicher durch  $(2^{t+1} - 1) \cdot a$  und durch  $a$  teilbar; die Summe seiner Teiler soll aber nur  $= a \cdot 2^{t+1}$  sein, so daß  $a = 1$  und  $2^{t+1} - 1$  prim sein muß); aber es ist bis heute unbekannt, ob es auch ungerade vollkommene Zahlen gibt; man kennt nur stark einschränkende Bedingungen. – Zu vollkommenen Zahlen s. unter historischem Aspekt O. Ore, Number theory and its history, New York/Toronto/London 1948, 91–96 und 359 a,

gramm der ‚Politeia‘ offensichtlich glänzend paßt. Dort wird in der zweiten Hypothesis, in der wohl hauptsächlich die  $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$ , also das zweite Prinzip aus Platons Esoterik, dargestellt wurde<sup>29</sup>, zunächst von der Zweierbestimmung des seienden Einen – die notwendig geworden ist, nachdem in der ersten Hypothesis ein völlig transzendentes Eines sich als unmöglich erwiesen hat – ausgegangen; und zwar gelangt Platon von dieser Zweierheit<sup>30</sup> zu einem  $\acute{\alpha}\pi\epsilon\iota\rho\nu \dots \pi\lambda\eta\theta\omicron\varsigma$  (143 a2), also unendlicher Vielheit, dadurch, daß jedes Moment der Zweierbestimmung immer wieder um sein jeweils Anderes ergänzt wird (denn das Eins *ist* ein Teil und das Seiende ist *ein* Teil jener Ausgangsbestimmung, des seienden Einen: 142 e). Wir haben hier gewissermaßen einen ‚binären Baum‘, aus dem alle natürlichen Zahlen erzeugt werden könnten; und doch ist nicht hier schon von ihnen ausdrücklich die Rede, sondern erst später, als in einem zweiten, merkwürdig unvermittelten Ansatz (143 a4ff) wiederum von den zwei Bestimmungen Eines und Sein ausgegangen wird, denen die dritte Kategorie der Verschiedenheit hinzugefügt wird, da ja beide Bestimmungen voneinander unterschieden seien (143 b3ff). Damit haben wir, so Platon, die Zahlen Zwei und Drei; und aus ihrer (unbegrenzt iterierten) Multiplikation sollen sich nun alle Zahlen ergeben. Auf die Frage des Parmenides, ob denn bei diesem Verfahren eine Zahl „übrig bleibe“ (d. h.: ob es eine Zahl gebe, die nicht durch es erzeugt werde), antwortet Aristoteles mit ‚nein‘ (144 a2ff). Das ist nun offensichtlich falsch<sup>31</sup>; denn nicht nur die Primzahlen können durch Multiplikation nicht generiert werden; durch das platonische Verfahren kommen vielmehr nur Zahlen der Struktur  $2^i \cdot 3^k$  (mit  $i, k \in \mathbb{N}$ ) zustande. Die hier vorliegende Schwierigkeit hat Becker glänzend aufgelöst: nach ihm kommt es Platon an dieser Stelle „auf die Erzeugung sämtlicher Zahlqualitäten, nicht sämtlicher Zahlquantitäten an“<sup>32</sup>; und zwar gehen die wichtigsten Zahltypen, die in der damaligen Arithmetik untersucht wurden, auf das Einteilungskriterium zurück, ob die Faktoren der entsprechenden Zahlen entweder nur gerade, nur ungerade oder sowohl gerade als auch ungerade Zahlen sind. Das IX Buch Euklids besteht nun zum großen Teil aus (ziemlich einfachen) Sätzen über Zahlen der entsprechenden Struktur und ihre wechsel-

---

unter streng mathematischem z. B. A. Scholz / B. Schoeneberg, Einführung in die Zahlentheorie, Berlin/New York 1973, 29f.

<sup>29</sup> S. Höhle, Wahrheit u. Geschichte 461 ff. und etwa auch H. Krämer, Der Ursprung der Geometaphysik, Amsterdam 1964, 1967, 199 sowie M. Subr, Platons Kritik an den Eleaten, Hamburg 1969, 36f.

<sup>30</sup> Vgl. 142 e 4f.; 142 e 7f.: ὅστε ἀνάγκη δὲ αἰεὶ γινόμενον μηδέποτε ἔν εἶναι;

<sup>31</sup> Die Falschheit dieser Aussage ist wohl der Grund dafür, warum Krämer in seiner Sammelrezension ‚Neues zum Streit um Platons Prinzipientheorie‘, in: PhR 27 (1980) 1–38 zur Stelle schreibt: „die Ableitung der Zahlenreihe ist nicht dogmatisch verbindlich, sondern als ad hoc-Argumentation aufzufassen“ (12). Freilich werden wir sehen, daß hier Platon gar nicht die Ableitung der Zahlenreihe im Auge hatte.

<sup>32</sup> Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der Euklidischen Elemente (1934) in: Zur Geschichte der griechischen Mathematik (Anm. 15) 125–145, 142.

seitige Beziehung; und auf diese Zahlentypen bezieht sich Platon offensichtlich und ausdrücklich<sup>33</sup>; sie also – und nicht alle natürlichen Zahlen – will er hier generieren. Daß er dabei 2 als gerade, 3 als ungerade Zahl κατ' ἐξοχήν nennt, ist verständlich; denn 2 und 3 sind ja die jeweils erste gerade bzw. ungerade natürliche Zahl, da ja die Eins für die ganze Antike (und lange darüber hinaus) im allgemeinen nicht als Zahl galt<sup>34</sup>.

Legt man diese ‚Parmenides‘-Stelle mit dem Liniengleichnis zusammen, so erhellt, daß Platon eine Erklärung dafür geben wollte, warum gerade diese zwei Zahlprädikate in der Zahlentheorie von besonderer Bedeutung sind – eine Frage, die nach ihm die Mathematik, die diese Prädikate einfach aufgreift, weder beantwortet noch auch, aus prinzipiellen Gründen, je beantworten kann. Platon stellte sich eine Antwort auf diese Frage offensichtlich in dem Sinne vor, daß in dem Begriffspaar περιττόν/ἄρτιον sich auf arithmetischer Ebene die Dualität der Prinzipien (ἔν/ἄόριστος δυάς) konkretisiert<sup>35</sup>; diese Prinzipien finden nämlich nach Platon als Grundstruktur einer ontologia generalis in allen Seinssphären (in Natur, Geschichte, Ethik, Politik, aber auch auf Ebene der mathematischen Entitäten) ihre je spezifische Anwendung<sup>36</sup> – im Bereich der Prädikate der Zahlentheorie eben als περιττόν und ἄρτιον.

Doch Platons Absicht ist es, über die Zahlenprädikate hinaus auch die Zahlen selbst aus seinen Prinzipien zu generieren<sup>37</sup>, wie wir besonders

<sup>33</sup> Vgl. 143 e 7 f.: Ἄρτιά τε ἄρα ἀρτιάκις ἂν εἴη καὶ περιττὰ περιττάκις καὶ ἄρτια περιττάκις καὶ περιττὰ ἀρτιάκις.

<sup>34</sup> S. etwa Arist. Metaph. 1088 a 6. Vgl. auch Euklid VII Def. 11 und 13; einige Beweise werden bei Euklid sogar doppelt geführt: für die eigentlichen Zahlen und dann separat für die Eins (vgl. VII 9 und VII 15). Noch für Cusanus ist die Eins sowohl Zahl als sie es auch nicht ist, eigentlich ist sie für ihn nämlich nur Prinzip der Zahl: „monas est et non est numerus, sed principium numeri“ (De princ., cap. 32, Z. 4f. Feigl-Vaupel-Wilpert [Padua 1960]). Erst mit Petrus Ramus und Simon Stevin begann die Eins als Zahl zu gelten (vgl. H. Gericke, Geschichte des Zahlbegriffs, Mannheim/Wien/Zürich 1970, 29 ff.).

<sup>35</sup> Zur Proportion ἔν: δυάς = περιττόν: ἄρτιον s. Arist. Ph. 203 a 10 ff. (= Test. 23 A Gaiser); vgl. auch Metaph. 986 a 23 ff., wo auch die pythagoreische Proportion ἔν: πλῆθος = τετράγωνον: ἐτερόμηκες überliefert wird. S. dazu Gaiser 54 f., 94. Entscheidend für die erste Zuordnung ist, daß gerade Zahlen teilbar (und somit Ausdruck der δυάς) sind.

<sup>36</sup> Es bleibt freilich eine prinzipielle Grenze des platonischen Systemansatzes, daß er das kategoriale Novum auf den einzelnen Seinssphären nicht eigentlich erklären, sondern letztlich voraussetzen muß; allerdings kann Platon – unter der Voraussetzung, daß es z. B. so etwas wie mathematische Entitäten oder geschichtliche Verläufe gibt – von der Prinzipientheorie aus einiges über die Binnenbestimmungen dieser Sphären sagen. Diesen Aspekt hat Krämer neuerdings sehr zu Recht unterstrichen: „Si ha, dunque, un rapporto di dipendenza unilaterale non rovesciabile, in cui, tuttavia, il piano più alto offre solamente condizioni necessarie, ma non anche sufficienti per il piano successivo. Infatti, la diade di grande-e-piccolo gioca un ruolo di fondamento in tutti i piani come principio materiale, però senza che la sua differenziazione venga ulteriormente fondata; il novum categoriale rimane, quindi, non spiegato.“ (Krämer, Platone 164). Krämer unterscheidet in diesem Zusammenhang ‚procedimento regressivo‘ und ‚procedimento derivativo‘ (162) und denkt dabei an Platons Methoden von ἀνοδος und κάθοδος (dazu s. etwa Test. 10 Gaiser und natürlich R. 511 b f.); die κάθοδος bleibt nach Krämer notwendig defizient (213).

<sup>37</sup> Wahrscheinlich dachte sich Platon die Erzeugung der Zahlen vermittelt über die beiden Zahlprädikate, die, da sie allgemeiner und zudem nur zwei sind und die Reihe der natürlichen Zahlen in zwei vollständig disjunkte Klassen zerlegen, vorden einzelnen Zahlen konsti-

den Zeugnissen der ungeschriebenen Lehre entnehmen können. Aus ihnen resultiert erstens, daß die generierenden Prinzipien, also  $\epsilon\nu$  und  $\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$   $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$ , selbst noch keine Zahlen sind<sup>38</sup>. Dies ist eigentlich trivial – denn Prinzipien einer *ontologia generalis*, die u. a. auch die Ethik fundieren soll, können nicht mit besonderen Entitäten wie den Zahlen 1 und 2 identisch sein –; aber es sei doch gesagt, um verbreitete Mißverständnisse abzuwehren. Darüber hinaus unterscheidet Platon nicht nur zwischen den Prinzipien und den Zahlen, sondern führt in einem Zwischenbereich – einer dritten Sphäre – Idealzahlen ein. Innerhalb der platonischen Seinshierarchie, die, etwas vereinfacht, aus Prinzipien, Ideen, mathematischen Entitäten und natürlicher Welt besteht, kommt den Idealzahlen ein Platz auf Ebene der Ideen, den mathematischen Zahlen auf Ebene der Mathematika zu<sup>39</sup>. Wichtigste Merkmale der Idealzahlen sind, daß mit ihnen nicht operiert werden kann (daß sie also nicht addiert, subtrahiert usw. werden können<sup>40</sup>) und daß sie nur bis zur Dekas gehen<sup>41</sup>. Die Generierung der Ideal- und analog der mathematischen Zahlen stellte sich Platon zweitens im einzelnen so vor, daß das  $\epsilon\nu$  die (mit ihm nicht identische!) Eins als das Prinzip aller Zahlen konstituierte und daß dann die übrigen Zahlen aus der Eins durch eine Zusammenwirkung von  $\xi\omega$  und  $\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$   $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$  generiert würden<sup>42</sup>. Wir sehen hier zwei Niveaus, auf denen von Prinzipien der Zahlen die Rede sein kann. Auf dem ersten, noch allgemein-ontologischen sind die logischen Prinzipien von Einheit und Vielheit Ursache der Zahlen. Auf dem zweiten werden, nachdem die (Zahl) Eins erzeugt worden ist, die restlichen Zahlen generiert; Prinzipien sind hier die Eins – also nicht die Einheit, sondern ihr arithmetisches Pendant – und die arithmetisch aktive  $\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$   $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$ . Die Unterschei-

tuert werden mußten. Das legt jedenfalls der Aristotelesbericht *Metaph.* 1091 a 23 ff. (= Test. 28 b *Gaiser*) nahe.

<sup>38</sup> S. *Krämer*, *Platone* 162; s. auch *R. Seide*, *Die mathematischen Stellen bei Plutarch*, Diss. Regensburg 1981, 97.

<sup>39</sup> Daß bei Platon die Mathematika eine Zwischenstellung haben (zwischen Prinzipien/Ideen und sensibilia), ist u. a. bei Aristoteles überliefert (*Metaph.* 987 b 14 ff. = Test. 22 A *Gaiser*; *Metaph.* 1028 b 19 ff. = Test. 28 a *Gaiser*); ebenso, daß Platon zwischen mathematischen und Idealzahlen unterschieden habe (*Metaph.* 1080 a 12 ff. = Test. 59 *Gaiser*; *Metaph.* 1083 a 20 ff. = Test. 56 *Gaiser*; *Metaph.* 1086 a 2 ff. = Test. 57 *Gaiser*; *Metaph.* 1090 b 32 ff. = Test. 28 b *Gaiser*; s. auch *Syrianus*, In *Arist. Metaph.* 159, Z. 33 ff. Kroll = Test 58 *Gaiser*). Daß die entsprechenden Berichte zuverlässig sind, scheint mir – zumal nach *Gaisers* ausführlicher Rekonstruktion (89 ff.) – nicht mehr recht bezweifelt werden zu können. Platons Argument für eine kategoriale Unterscheidung zwischen mathematischen Entitäten auf der einen und Ideen (u. a. der mathematischen Entitäten) auf der anderen Seite bestand darin, daß es nur *eine* Idee des Kreises, der Zahl 3 usw. geben kann, während mathematische Operationen öfters die Existenz *mehrerer* mathematischer Kreise, mathematischer Zahlen 3 voraussetzen, so z. B. die Addition  $3+3$  (vgl. *Metaph.* 987 b 17 f. = Test. 22 A *Gaiser*; zur Relevanz des Arguments s. Anm. 60).

<sup>40</sup> Vgl. z. B. *Arist. Metaph.* 1080 a 19 ff. (= Test. 59 *Gaiser*) und 1083 a 34 ff. (= Test. 56 *Gaiser*).

<sup>41</sup> Vgl. *Arist. Ph.* 206 b 32 f. (= Test. 24 *Gaiser*) sowie *Metaph.* 1073 a 20 f. (= Test. 62 *Gaiser*) und 1084 a 12 ff., a 25 ff. (= Test. 61 *Gaiser*).

<sup>42</sup> Vgl. *S. E.*, *Adv. math.* X 276 f. (= Test. 32 *Gaiser*).

dung zwischen beiden Stufen ist wichtig; es wird sich zeigen, daß etwa Hegels Konzeption der Generierung der Zahlen eine Entsprechung vornehmlich zum ersten Niveau Platons darstellt, während hingegen die Peano'schen Axiome eine Antwort auf die Frage geben, die sich auf dem zweiten Niveau stellt<sup>43</sup>.

Auf das erste Niveau ist die platonische Reflexion bezogen, daß jede Zahl, die größer als 1 ist, Einheit von Einheit und Vielheit ist, insofern sie einerseits aus mehreren Einheiten besteht, andererseits selbst eine Einheit ist<sup>44</sup>. Als Prinzip der Vielheit fungiert dabei die ἀόριστος δυάς; Aristoteles sieht gerade in der Ersetzung der unbegrenzten Vielheit durch die Zweiheit eine der wichtigsten Neuerungen Platons gegenüber den Pythagoreern<sup>45</sup>. Hier erhellt nochmals, warum die ἀόριστος δυάς nicht mit der Zahl 2 identisch sein kann: sie ist ja nicht nur Prinzip der Zwei, sondern aller Zahlen, die größer als 1 sind; sie manifestiert sich innerhalb der Zahlenreihe zwar zum ersten Mal in der Zahl 2 – zu der sie daher eine besondere Affinität besitzt –, aber eben nicht nur in ihr<sup>46</sup>. Übrigens gilt es zu unterscheiden zwischen den Tatsachen, daß es einerseits zwei Prinzipien gibt, und daß andererseits das zweite Prinzip selbst Prinzip von Zweiheit ist; es gibt also zwei Zweiheiten, die nach Platon Voraussetzung für den Zahlbegriff sind.

<sup>43</sup> In der Tat gibt es in der neuplatonisierenden arithmetischen Tradition zwei – den beiden Stufen entsprechende – verschiedene Typen von Zahldefinitionen: die eine bezieht sich auf die ontologischen Prinzipien von Einheit (ἕν, πέρας) und Vielheit, die andere hingegen auf die arithmetische Eins als Ausgangspunkt der Zahlenreihe. Zum ersten Typus gehört etwa die Definition der Zahl als einer begrenzten Vielheit (etwa bei Nikomachos, Intr. arithm., I 7; 13, Z. 7 Hoche: Ἀριθμὸς ἐστὶ πλῆθος ὀρισμένον; diese Definition geht nach Jamblichs Nikomachoskommentar auf Eudoxos zurück (10, Z. 17 f. Pistelli); vgl. auch Arist. Metaph. 1020 a 13); zum zweiten Typus hingegen diejenige, daß die Zahl (nach Art einer iterierten Addition) von der Eins ausgehe (s. z. B. Theo Smyrnaeus, Expos. rer. math. 18, Z. 3 ff. Hiller: ἀριθμὸς ἐστὶ σύστημα μονάδων, ἢ προποδισμὸς πλῆθους ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενος καὶ ἀναποδισμὸς εἰς μονάδα καταλήγων; vgl. auch Proklos' Euklidkommentar, 6, Z. 15 f. Friedlein: ὁ τε γὰρ ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀρξάμενος ἀπαιστον ἔχει τὴν ἀξίησιν). In Euklids Zahldefinition (VII def. 2: ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος) finden sich Momente aus beiden Definitionstypen.

<sup>44</sup> Vgl. G. Böhme, Zeit und Zahl. Studien zur Zeittheorie bei Platon, Aristoteles, Leibniz und Kant, Frankfurt 1974, 130: „Kurz gesagt, ist es die systematische Funktion der Zahl, die Vermittlung zu leisten zwischen den beiden obersten Prinzipien dieser Philosophie, dem ἕν und der ἀόριστος δυάς, dem Einen und der unbestimmten Zweiheit“. S. überhaupt 130–144 besonders zu Philb. 16 eff., 24 eff.

<sup>45</sup> Metaph. 987 b 25 f. (= Test. 22 A Gaiser): τὸ δὲ ἀντὶ τοῦ ἀπειροῦ ὡς ἐνὸς δυάδα ποιῆσαι, τὸ δ' ἀπειρον ἐκ μεγάλου καὶ μικροῦ, τοῦτ' ἴδιον.

<sup>46</sup> Vgl. K. Oehler, Der entmythologisierte Platon. Zur Lage der Platonforschung (1965), jetzt in: J. Wipperm (Hrsg.), Das Problem der ungeschriebenen Lehre Platons, Darmstadt 1972, 95–129, 117: „Die Zweiheit ist Prinzip der Vielheit. Die Zwei ist der erste Fall einer Menge. Mit ihr nehmen alle anderen Vielheiten ihren Anfang. Sie selbst aber, als Zahl Zwei, ist bereits festgelegt, ist begrenzt. Sie selbst schreitet nicht fort zu unbestimmter Vervielfältigung. Deshalb macht Platon nicht sie, die Zahl Zwei, zum Prinzip der Vielheit, sondern die Unbestimmte Zweiheit.“ – Eine Sonderstellung der Zahl Zwei findet sich noch bei Cusanus; sie wird bei ihm damit begründet, daß die Zwei – als Mutter der Vielheit – weder Einheit noch Vielheit sei: „dualitatem neque unitatem neque multitudinem“ (De princ., op. cit., cap. 31, Z. 14 f.; cap. 32, Z. 1 ff. findet ein ausdrücklicher Rückgriff auf Platons Prinzipientheorie statt).

Auf dem zweiten Niveau stellt sich nun das Problem der Generierung der Zahlen aus der Eins. Diese wurde nicht nach Art einer iterierten Addition konzipiert – was vom heutigen Standpunkt aus naheliegend wäre –, sondern, zumindest für die Idealzahlen, nach Art einer dualen διαίρεσις, also einer Dichotomie; wie diese im einzelnen ausgesehen hat, ist heute wohl nicht mehr sicher festzustellen. Dennoch wird man als plausible Veranschaulichungen immer noch die vor mehr als einem halben Jahrhundert vorgelegten Rekonstruktionsversuche J. Stenzels<sup>47</sup> und O. Beckers<sup>48</sup> gelten lassen, die trotz mancher Differenzen im Detail darin übereinstimmen, daß sie in der Grundstruktur (wenn sie auch weniger einfach sind) an die modernen ‚graphischen Bäume‘ erinnern. Allerdings bleibt an diesen Versuchen mangelhaft, daß sie den Unterschied zwischen Ideal- und mathematischen Zahlen tendenziell überspielen; zumal bleibt bei ihnen ungeklärt, wieso die Idealzahlen auf die Dekas beschränkt sind.

Daß diese in ihrer Anzahl überhaupt beschränkt waren, läßt sich m. E. damit erklären, daß für Platon der zwischen den zwei Prinzipien und den abzählbar unendlich vielen natürlichen (mathematischen) Zahlen angesetzte Bereich der Idealzahlen aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehen mußte. Freilich sagt das noch nicht, warum sich Platon gerade für die Dekas entschied. Eben diesen Sachverhalt hat nun Gaiser in seinem Rekonstruktionsvorschlag (115 ff) zu erhellen versucht. Nach ihm ist in den platonischen Idealzahlen die dimensionale Struktur der Welt präfiguriert; da nun die Dimensionenentwicklung in der Tetras (Einheit-Länge-Breite-Tiefe) vollendet ist<sup>49</sup>, mußte die Tetras – bzw. die Dekas, die ja als Summe der ersten vier Zahlen schon den Pythagoreern als vollkommene Zahl galt<sup>50</sup> – ausgezeichnet werden, und zwar als Grenze der

<sup>47</sup> Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles, Leipzig/Berlin 1924, <sup>2</sup>1933, 30ff.

<sup>48</sup> Die diairetische Erzeugung der platonischen Idealzahlen, in: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B, 1 (1931) 464–501. Becker knüpft kritisch an Stenzel an und erzielt ihm gegenüber einige bemerkenswerte Präzisierungen. Weiterentwickelt hat Becker seine Auffassung in seiner Abhandlung ‚Zum Problem der platonischen Idealzahlen (Eine Retraktion)‘, in: *ders.*, Zwei Untersuchungen zur antiken Logik, in: KPS 17 (1957) 1–22. In diesem Aufsatz korrigiert sich Becker übrigens dahingehend, daß statt stammbaumförmiger Schemata zur Veranschaulichung der Erzeugung der Zahlen wahrscheinlich „eine (zumeist wohl horizontal liegende) Strecke verwendet“ wurde, „die in Segmente, den Unterarten einer Art entsprechend, geteilt wird“ (16). Das schwierige ἔξω τῶν πρώτων (Metaph. 987 b 34) erklärt Becker als „außer den (beiden) ersten Zahlen“, nämlich der Eins und der Zwei (8f.) – eine Interpretation, die problematisch, aber nicht unmöglich ist. „Primzahlen“ gibt ja keinen mathematischen Sinn.

<sup>49</sup> Vgl. S. E., Adv. math. X 278 ff. (= Test. 32 Gaiser.) und Gaiser 44 ff; s. auch Speusipp frag. 4 Lang (= [Jamblich], Theol. Arithm. 82, Z. 10–85, Z. 23 De Falco).

<sup>50</sup> Natürlich in einem anderen als in dem euklidischen Sinne (vgl. dazu Anm. 28); s. Th. Heath, A manual of Greek mathematics, New York 1963, 41–43. – Zur Auszeichnung der Dekas bei Philolaos und Archytas s. H. Diels/W. Kranz, Fragm. d. Vorsokratiker 44 B 11 und 47 B 5 (zu Philolaos vgl. E. Frank, Plato und die sogenannten Pythagoreer, Halle 1923, 309 ff.); ausdrücklich findet sich das Argument, die Dekas sei ausgezeichnet als Summe der ersten vier Zahlen H. Diels/W. Kranz, Fragm. d. Vorsokratiker 58 B 15 (neben anderen Argumenten).



Idealzahlen. Dieses Argument Gaisers ist plausibel; freilich wird hiermit die Auszeichnung der Tetras/Dekas nur ‚induktiv‘ – auf dem Wege der ἀνοδος – begründet: Platon hat aus der phänomenologisch vorgegebenen Dimensionenzahl auf eine bestimmte Strukturierung der Idealzahlen geschlossen; diese müßte aber selbst deduktiv aus den Prinzipien begründet werden, und gerade dies leistet Platon nicht – auch weil es in der Tat nur sehr schwer zu leisten ist.

Hier stellt sich ferner die Frage, warum Platon nicht unmittelbar die Tetras ausgezeichnet hat – es ist ja nicht einzusehen, warum deren Summe innerhalb der Ideenzahlen eine Rolle spielen soll (wenn schon nicht sie selbst, warum nicht etwa deren Produkt?). Die Erklärung, die Gaiser dafür gegeben hat (119 ff), ist sachlich wie philologisch problematisch, wie er selber zugibt (121); viel wahrscheinlicher scheint mir, daß hinter der Gewaltbarkeit des Übergangs von der Tetras zur Dekas der Wille steht, das dekadische Zahlensystem zu ‚begründen‘ – so jedenfalls O. Becker in einem späteren, gleichzeitig mit Gaiser erschienenen Beitrag (Versuch einer neuen Interpretation der platonischen Ideenzahlen, in: AGPh 45 [1963] 119–124). Freilich geht das dekadische System auf die kontingente Fingerzahl zurück (s. schon [Arist.] Pr. 910 b 24 ff); eines der griechischen Wörter für ‚zählen‘ lautet ja *πεντάζω* (wörtlich ‚fünfen‘) – es deutet an, warum 5 bzw. 10 zu einer besonders wichtigen Zahl werden konnte.

Daraus folgt nun, daß wir diese Auszeichnung der Dekas heute nur mit historischem Interesse zur Kenntnis nehmen können. Immerhin ist sie wirkungsmächtig geworden: Aristoteles' krampfhafter Versuch, die Zahl der Kategorien über die ersten vier einzig wichtigen hinaus auf zehn aufzustocken, kann offensichtlich nur verstanden werden vor dem Hintergrund dieser ontologischen Auszeichnung der Zehnzahl, die auf Platons Akademie und weiter auf die Pythagoreer zurückgeht.

Platons *δύαξ* ist nun nicht nur für die Generierung der Ideal- und der natürlichen Zahlen aus dem *ἐν* verantwortlich; nach Platon wird sie – auf die ja innerhalb des akademischen Kategoriensystems die zweistelligen Relationsprädikate zurückgeführt wurden<sup>51</sup> – immer dominierender in der Entfaltung der Verhältnisse, der rationalen und zumal der irrationalen Größen<sup>52</sup>, die ja bekanntlich den Griechen nicht als Zahlen galten. Von diesem letzten Punkt abgesehen, erinnert somit die *δύαξ* an Dedekinds Schnittbegriff; denn wie diese, so garantiert ja der Schnitt die Existenz irrationaler Größen. Interessant ist aber darüber hinaus, daß schon

<sup>51</sup> Vgl. Hermodor frg. 7 Isnardi-Parente (Napoli 1982) (= Test 31 Gaiser), S. E., Adv. math. X 263 ff. (= Test. 32 Gaiser) sowie D. L. III 104 f., 108 f. und Codex Marcianus 23, 67, 68 (= Test. 43 und 44 Gaiser).

<sup>52</sup> Vgl. Arist. Metaph. 1020 b 26 ff. (= Test. 35 Gaiser) und Pappus (Abū 'Othmān al-Damashki), In decim. Euclidis Elem. libr. comment, I 9.13; 71 f., 76 f. Thomson (= Test. 67 b Gaiser) sowie Gaiser 24 f., 71 f., 143 f.

bei Platon – dank der  $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$  – eine gewisse Kontinuität zwischen den natürlichen Zahlen und den (ir)rationalen Größen hergestellt wird – eine Kontinuität, die bekanntlich der antiken Mathematik fremd war und die erst in der Moderne allgemein anerkannt wurde; Dedekinds Theorie der irrationalen Zahlen stellt innerhalb dieser Entwicklung einen gewissen Höhepunkt dar. Diese Kontinuität ist aber in Platons Einsicht angelegt, daß schon in der Zahl 2 jenes Prinzip am Werk ist, das in den „absolut irrationalen“ Verhältnissen<sup>53</sup> sich am reinsten entfaltet. Somit ließe sich Platons  $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$  als Vorläufer von Dedekinds Schnittbegriff interpretieren: in diesem ist das auf den Begriff gebracht worden, was in jener sich auf noch sehr abstrakte, mehr philosophische als mathematische Weise ankündigt – der Gedanke, daß zwischen den natürlichen Zahlen und den anderen Größen nicht eine abrupte Zäsur, sondern ein rein arithmetisch zu fassender Zusammenhang besteht<sup>54</sup>.

### III.

Um Platons Konzeption der Erzeugung der Zahlen aus  $\xi\nu$  und  $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$  kritisch zu würdigen, bietet es sich wohl am ehesten an, nachzuweisen, daß auch in wesentlich späteren, ja sogar aktuellen Konzeptionen ähnliche Vorstellungen zu finden sind. In der Tat möchte ich zeigen, daß die Art und Weise, wie man in der heutigen Mathematik die natürlichen Zahlen einführt, nämlich über die Peano'schen Axiome, als eine ‚Entfaltung‘ der platonischen Konzeption aufgefaßt werden kann, einer Konzeption,

<sup>53</sup> Damit meine ich mit *Gaiser* (24, 71) Verhältnisse, die nicht einmal in der dritten Potenz – die der körperlichen, also für die Griechen letzten Dimension zugeordnet ist – kommensurabel werden.

<sup>54</sup> Eine detaillierte Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Platons  $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$  und Dedekinds Schnittbegriff würde sich lohnen; sie ist hier nicht beabsichtigt. Entscheidend ist, worauf schon *Taylor* verwies (s. Anm. 23), daß der andere Name der  $\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$   $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$ ,  $\mu\acute{\epsilon}\gamma\alpha$  –  $\mu\iota\kappa\rho\acute{\nu}\nu$ , genau auf den euklidischen Algorithmus paßt, mit dem rein arithmetisch Irrationalitäten eingeführt werden: sind doch zwei aufeinanderfolgende Werte des Quotienten von Diagonal- und Seitenzahl (wobei  $s_{n+1} = s_n + d_n$  und  $d_{n+1} = 2s_n + d_n$ ) alternierend größer und kleiner als der präzise Wert von  $\sqrt{2}$ . Auf die Begriffe größer und kleiner kommt es nun aber bei der Definition von Dedekinds Schnitt an. Übrigens verwies schon Toeplitz auf einen Zusammenhang zwischen Platons  $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$  und Dedekinds Schnitt (op. cit., 74 f.). An anderer Stelle betont Toeplitz zu Recht, daß Euklid V „ganz gewiß nirgends etwas davon erwähnt (ist), daß man diese Wesenheiten aus den ganzen Zahlen erzeugen möchte oder könnte“ (52); jedoch könnte man hinzufügen, daß sich bei Platon immerhin der Gedanke findet, die ganzen Zahlen und die irrationalen Werte aus denselben Prinzipien zu erzeugen. – Es ist übrigens möglich, daß sich Platon den Übergang zu den Irrationalitäten anhand des Dimensionenmodells veranschaulicht hat, wie *Gaiser* annimmt (s. die Anm. 52 zitierten Stellen); freilich scheint sich mir *Gaisers* Hypothese nicht notwendig aus dem Testimonienbefund zu ergeben. Die Entitäten der eudoxischen Proportionenlehre übergreifen jedenfalls sowohl arithmetische als auch geometrische Wesenheiten; und gerade bei Platon ist der Vorrang der Arithmetik vor der Geometrie offensichtlich. (Nur in dem bei Simplicios [In Arist. Ph. 453, Z. 31 ff. Diels = Test. 23 B *Gaiser*] erhaltenen Porphyriosbericht über die Ellenteilung wird eindeutig erst von einer geometrischen Vorstellung ausgegangen, die dann auf die Zahlen übertragen wird.)

die durchaus in der Vorgeschichte der Peano'schen Axiome einen bedeutenden Platz verdient (2). Weiter werde ich die Frage diskutieren, inwiefern das von Leibniz entworfene binäre System als später Erbfolger des platonischen Programms einer Reduktion von unendlicher Vielheit auf die Zweiheit verstanden werden kann (3). Über diese Entsprechungen in der modernen Mathematik hinaus ist es aber bemerkenswert, daß sich auch in der modernen *Philosophie* der Mathematik – und zwar bei Brouwer – Reflexionen finden, die, ähnlich denen Platons, ausdrücklich dem Prinzip der Zweiheit eine für die Mathematik konstitutive Funktion zusprechen (4). Freilich ist Brouwers Philosophie der Mathematik in ihren ontologischen Grundlagen der platonischen geradezu entgegengesetzt, wenn sie auch material mit der platonischen manches gemeinsam hat. Von weitgehenden Entsprechungen zu Platon nicht nur in der Interpretation einzelner mathematischer Strukturen, sondern auch in der ontologischen Basis, in der systematischen Einordnung der Mathematik und der Bestimmung ihres Verhältnisses zur Philosophie kann man hingegen bei Hegels Philosophie der Mathematik sprechen; ist doch Hegels Idealismus wohl der bisher letzte bedeutende Repräsentant desjenigen Typus von Philosophie, dem auch Platons System zugewiesen werden kann; Platon und Hegel gehören ja – wie etwa auch der Neuplatonismus der Spätantike und des Mittelalters – in die Tradition des objektiven Idealismus; der Versuch einer umfassenden Wertung nicht nur einzelner Detailüberlegungen Platons, sondern der Gesamtanlage seiner Philosophie der Mathematik – ein Versuch, der hier nicht beabsichtigt ist, wenn er auch umrißartig skizziert werden soll – hätte daher vornehmlich an Hegel anzuknüpfen. Aus chronologischen Gründen will ich daher zunächst angeben, welche Momente aus Platons Philosophie der Mathematik in derjenigen Hegels noch wirksam sind und, dem Thema dieses Aufsatzes entsprechend, besonders in Hegels Zahlbegriff Platonisches aufzeigen (1).

(1) Die nicht nur in den Makrostrukturen, sondern auch in vielen Einzelheiten anzutreffenden Parallelen zwischen den Systemen Platons und Hegels sind in der letzten Zeit öfters dargestellt worden<sup>55</sup>; dennoch ist gerade die Philosophie der Mathematik der beiden Denker wohl jener systematische Bereich, der am seltensten verglichen wurde. Das hängt sicher damit zusammen, daß eine gründliche Untersuchung über Hegels Philosophie der Mathematik immer noch aussteht<sup>56</sup>. Dafür gibt es verschiedene Gründe: erstens daß eine solche Untersuchung gute Kenntnisse sowohl des Hegelschen Systems als auch der Mathematikgeschichte

<sup>55</sup> *Höfle*, Wahrheit u. Geschichte, wo ich auch zahlreiche weitere Literatur angegeben habe, und jetzt *Krämer*, Platone 282–302.

<sup>56</sup> Vf. hofft, in den nächsten Jahren eine Abhandlung zur Philosophie der Mathematik innerhalb der Tradition des Idealismus vorzulegen.

mindestens bis zum 19. Jahrhundert voraussetzen würde und zweitens daß Hegels Philosophie der Mathematik fast die einzige philosophische Disziplin ist, die innerhalb seines Systems nicht eigentlich einen klaren Platz hat. Da dies bisher noch kaum konstatiert oder gar erklärt worden ist, sei kurz der Grund dafür angegeben. Die Systeme des objektiven Idealismus teilen sich im wesentlichen auf in zwei Gruppen; nach der einen geht der Bereich der ‚Idee‘ auf kontinuierliche, ‚lineare‘ Weise in die Natur über, wobei der Geist oder die Seele eine vermittelnde Instanz darstellt. Zu diesem ‚emanationistischen‘ Systemen gehört der Neuplatonismus und, trotz einiger gegenläufiger Tendenzen, auch die Philosophie Platons selbst. Für Hegel hingegen ‚entäußert‘ sich die Idee zunächst in ihr Anderes, d. h. die Natur, um anschließend als Geist zu sich zurückzukehren; der Geist ist somit nicht Mitte, sondern Telos. Diese ‚dialektische‘ Konzeption hat den großen philosophischen Vorteil, einigermaßen das Problem zu klären, warum denn der doch als absolut geltende Bereich der Idee noch in die Endlichkeit übergehen muß<sup>57</sup> – ein Problem, das bei der emanationistischen Systemvariante ungelöst, ja letztlich unlösbar bleibt. Dennoch läßt sich nicht leugnen, daß in letzterer die Einordnung mathematischer Entitäten wesentlich einfacher ist: für Platon wie für die Neuplatoniker vermitteln die Mathematika (wie die Seele) zwischen dem Bereich der Ontologie und dem der Natur. Eine derartige Lösung verbietet sich aber für Hegel, für den die Idee als dialektisch zunächst einmal gerade in das ihr Entgegengesetzte, d. h. in die Natur, übergehen muß; eine Zwischensphäre macht da keinen Sinn mehr. Wohin aber gehören nun die mathematischen Entitäten, etwa die einzelnen Zahlen? In den Bereich der Idee wohl kaum; denn wenn auch ‚die Zahl‘ eine Kategorie der ‚Wissenschaft der Logik‘ ist, so doch schwerlich die einzelnen Zahlen; ihre Logik ist ja eine undialektische und damit völlig unterschieden von derjenigen ontologischer Bestimmungen selbst. Doch auch in die Realphilosophie wird man die Zahlen nicht ohne weiteres einordnen wollen; sind sie doch abstrakter als selbst der Raum, die erste Kategorie der Naturphilosophie<sup>58</sup>.

Diese Aporien mögen genügen, um anzudeuten, daß die Philosophie der Mathematik bei Hegel gegenüber Platon ihren festen systematischen Ort verloren hat; dennoch ist es so, daß sich viel Platonisches in Hegels verstreuten Äußerungen über die Mathematik findet, auch und gerade was die Mittelstellung der Mathematika betrifft, obwohl entsprechende

<sup>57</sup> S. dazu *D. Wandschneider/V. Hösle*, Die Entäußerung der Idee zur Natur und ihre zeitliche Entfaltung als Geist bei Hegel, in: *Hegel-Studien* 18 (1983) 173–199.

<sup>58</sup> Der erste Teil der Naturphilosophie ist in der Berliner Enzyklopädie ‚Mechanik‘ betitelt, in der Heidelberger Enzyklopädie hingegen noch ‚Mathematik‘. Ist das ein Zeichen dafür, daß Hegel zunächst der Auffassung war, die Philosophie der Mathematik sei ein Teil der Naturphilosophie, daß er aber nachher diese Auffassung verworfen hat? – Zu Hegels Problemen mit der Philosophie der Mathematik s. jedenfalls <sup>3</sup>Enz. § 259 Anm.

Gedanken in Hegels System nicht mehr ohne weiteres nachzuvollziehen sind. Diese Mittelstellung besteht nach Hegel sowohl ontologisch – was die Seinsweise der Zahlen z. B. angeht – als auch gnoseologisch – also in Bezug auf die mathematische Denkweise. Die Zahlen sind, so Hegel in ausdrücklichem Anschluß an die platonische Konzeption, etwas, was zwischen rein Begrifflichem und Äußerlichem, Sinnlichem liegt: „... die *Zahl*, diese innerliche, abstrakte Äußerlichkeit ... Sie macht die letzte Stufe der Unvollkommenheit aus, das Allgemeine mit Sinnlichem behaftet zu fassen. Die Alten haben das bestimmte Bewußtsein darüber gehabt, daß die Zahl zwischen dem Sinnlichen und dem Gedanken in der Mitte stehe. Aristoteles führt es von Platon an (*Metaphysik* I, 5), daß derselbe sage, daß außer dem Sinnlichen und den Ideen die mathematischen Bestimmungen der Dinge dazwischenstehen ...“<sup>59</sup> Daß die Alten unterschieden hätten zwischen der  $\mu\omicron\nu\acute{\alpha}\varsigma$  bzw.  $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$  auf der einen und den Zahlen Eins und Zwei auf der anderen Seite, lobt Hegel daher als Zeichen eines gründlichen Bewußtseins von der Differenz zwischen Ontologie und Mathematik – eines Bewußtseins, das in den zeitgenössischen Versuchen, mathematische Begriffe ohne weitere Umschweife auf die Philosophie zu übertragen, bedauerlicherweise verlorengegangen sei: „es wird schon in Ansehung jener Zahlausdrücke ... angeführt, daß die Pythagoreer zwischen der Monas und dem Eins unterschieden haben; die Monas haben sie als den Gedanken genommen, das Eins aber als die Zahl; ebenso die Zwei für das Arithmetische, die Dyas ... für den Gedanken des Unbestimmten. – Diese Alten sahen fürs erste das Ungenügende der Zahlformen für Gedankenbestimmungen sehr richtig ein, und ebenso richtig forderten sie ferner statt jenes ersten Notbehelfs für Gedanken den eigentümlichen Ausdruck; um wieviel weiter waren sie in ihrem Nachdenken gekommen als die, welche heutigentags wieder Zahlen selbst und Zahlbestimmungen ... an die Stelle von Gedankenbestimmungen zu setzen ... für etwas Löbliches, ja Gründliches und Tiefes halten.“ (5.246)<sup>60</sup>

<sup>59</sup> Wissenschaft der Logik, 5.245 (alle Hegel-Zitate nach der Theorie-Werkausgabe, Frankfurt 1969 ff., mit Band- und Seitenzahl). Vgl. auch Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie, 18.235 ff. und <sup>3</sup>Enz. § 104 Anm. (die Enzyklopädie zitiere ich nach der Paragraphenzahl, da diese ja in allen Ausgaben identisch ist).

<sup>60</sup> Hegels Verteidigung der platonischen Unterscheidung zwischen der Kategorie der Einheit und der Zahl Eins – eine Unterscheidung, die sich auch im Neuplatonismus findet (s. etwa Theo Smyrnaeus, *Expos. rer. math.* 21, Z. 7 ff. Hiller) – ist in der Tat einleuchtend; die Differenz zwischen beiden Bestimmungen wird wohl eine jede Kategorienlehre anerkennen, die sich auf das Problem überhaupt ernsthaft einläßt. So heißt es etwa in E. Husserls ‚*Philosophie der Arithmetik*‘ (hg. von L. Eley, Den Haag 1970 [= Husserliana XII]): „Der Begriff der *Zahl Eins* ist nämlich wohl zu unterscheiden von dem Begriffe der *Einheit*.“ (134) Darüber hinaus findet sich – ohne jeden Bezug auf Platon – bei H. Rickert eine weitere Unterscheidung, die ganz analog ist der platonischen Differenzierung zwischen Ideal- und mathematischen Zahlen (wie überhaupt zwischen den Ideen mathematischer Entitäten und diesen mathematischen Entitäten selbst). Für Rickert ist nämlich wie für Platon (s. Anm. 39) die Tatsache, daß es viele Eins, Zwei, Drei usw. gibt, ein Grund, Zahlbegriff und Zahlen zu

Mit der Zwischenstellung der Zahlen zwischen Begrifflichem und Anschaulichem stimmt nach Hegel überein die Zwischenstellung der mathematischen Erkenntnis, die der empirischen über-, der philosophischen untergeordnet ist; ganz wie für Platon ist auch für Hegel die Hauptdefizienz der Mathematik darin begründet, daß in ihr Letztbegründung prinzipiell nicht möglich ist<sup>61</sup>. Die Mathematik ist auf Voraussetzungen angewiesen, die für sie uneinholbar bleiben – gemeint sind natürlich die Axiome; und gegen den damals im Zusammenhang mit den Versuchen, das Parallelenpostulat zu beweisen, verbreiteten Vorwurf, Euklid habe es zu Unrecht unterlassen, diesen Satz zu beweisen, schreibt Hegel (6.528): „Auch bei *Euklid* . . . findet sich unter dem Namen eines *Axioms* eine *Voraussetzung* über die *Parallel-Linien*, welche man für des Beweises bedürftig gehalten und den Mangel auf verschiedene Weise zu ergänzen versucht hat . . . Was jenes Axiom über die Parallel-Linien betrifft, so läßt sich darüber bemerken, daß wohl darin gerade der richtige Sinn Euklids zu erkennen ist, der das Element sowie die Natur seiner Wissenschaft genau gewürdigt hatte.“<sup>62</sup> Ganz wie Platon ist Hegel ferner der Ansicht, daß die Axiome der Mathematik philosophisch hergeleitet werden müßten (vgl. nur 6.372); „aus dem *Begriffe*“ (6.528), d. h. aus einer dialektischen Ontologie, wäre das Parallelenpostulat zu beweisen; innermathe-

---

unterscheiden; und ganz wie bei Platon kann man auch nach Rickert nur mit Zahlen, nicht aber mit den Zahlbegriffen rechnen (die Platons Idealzahlen entsprechen, die ja ἀσύμμετροι sind). „Es gibt beliebig viele Eins, beliebig viele Zwei usw., die alle als Exemplare unter die *Begriffe* der Eins, der Zwei usw. fallen, wenn es auch selbstverständlich nur je *einen* Begriff der Eins, *einen* Begriff der Zwei usw. geben kann . . . Also kann der Begriff der Zahl nicht mit der Zahl selbst zusammenfallen . . . Nur mit den *Zahlen selbst* kann man rechnen . . . Eine ausgeführte Theorie der Zahl würde diese Unterschiede sorgfältig zu berücksichtigen haben.“ (Das Eine, die Einheit und die Eins, Tübingen 1924, 70) – Es erhellt hier noch deutlicher, daß Platons Beschränkung der Idealzahlen auf die Dekas systematisch absurd ist; denn zu *jeder* Zahl müßte es ja einen Zahlbegriff geben, um den Rickertschen Terminus zu benutzen. Einen (sachlich natürlich beliebigen) Grund für Platons Vorgehen habe ich oben (337) anzugeben versucht

<sup>61</sup> Hinzu kommt, daß die Methode der Konstruktion etwa eines geometrischen Satzes nicht aus dem zu beweisenden Theorem selbst abzuleiten ist (vgl. 3.42 ff., 6.533 ff.); der Beweis hat daher nur die subjektive Funktion, erkennen zu lassen, nicht die objektive der Konstitution, wie es nach Hegel in der Philosophie der Fall ist.

<sup>62</sup> Vgl. I. Tóth, Die nicht-euklidische Geometrie in der Phänomenologie des Geistes, Frankfurt 1972, 29: „In *pulcherrimo Geometriae corpore duo sunt naevi*, . . . schrieb 1621 Sir John Savile, und einer dieser Makel, der großes Aufsehen erregte, war der Mangel eines (absolut-geometrischen) Beweises für das Parallelenpostulat.“ (Tóth zitiert Savile nach J. Wallis, *De postulato quinto dissertatio geometrica*, in: Opera, Oxoniae 1693, II 665.) Gleich darauf fährt Tóth fort: „Als Gauß, Lobatschewskij und Bolyai zu der Überzeugung der logischen Unabhängigkeit des Parallelenpostulats gelangten und auf dieser Basis die nicht-euklidische Geometrie aufbauten, haben sie damit auch Euklid rehabilitiert: was bis dahin als Makel verurteilt wurde, galt nunmehr als Euklids größte Leistung.“ Doch schon Hegel hat vor der Ausbildung der nicht-euklidischen Geometrien in diesem Sachverhalt eine Leistung Euklids gesehen; freilich folgt aus der Tatsache, daß die Mathematik eine ‚*ὑπόθεσις*‘-Wissenschaft ist, nicht, daß gerade das Parallelenpostulat Axiomcharakter hat. (Der *Beweis* dafür ist übrigens erst von Beltrami in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts geführt worden.)

matisch sei das nämlich prinzipiell ebenso unmöglich wie die Herleitung etwa der Dreidimensionalität des Raumes (6.528 f). Es versteht sich von selbst, daß für Hegel (ebenso wie für Platon) die Axiome der Mathematik keineswegs durch die Anschauung begründet werden könnten; scharf polemisiert Hegel gegen die Meinung, „ihre (sc. der Mathematik) hohe Wissenschaftlichkeit gründe sich sogar hierauf (sc. auf der Anschauung) und ihre Beweise beruhten auf der Anschauung. Es ist gegen diese Flachheit die flache Erinnerung zu machen nötig, daß durch das Anschauen keine Wissenschaft zustandekomme, sondern allein *durchs Denken*.“ (6.535; vgl. 6.286)<sup>63</sup> Einen konkreten Versuch, das Parallelenpostulat ‚aus dem Begriff‘ zu begründen, findet man bei Hegel freilich nicht; in der Tat dürfte ein derartiger Versuch äußerst schwierig, ja unmöglich sein. Wohl aber versucht Hegel – und damit kehren wir zum speziellen Thema dieses Aufsatzes zurück – aus seiner Logik die Existenz von Zahlen herzuleiten, und zwar indem er zeigt, daß die dialektische Entwicklung der Kategorien, die von der Unbestimmtheit des Seins ausgeht, notwendig zur Kategorie der Zahl führt. Es kann hier Hegels Argumentation nicht bewertet werden; es geht mir in diesem Zusammenhang nur um Entsprechungen zur platonischen Konzeption<sup>64</sup>.

In Hegels ‚Wissenschaft der Logik‘ ist die Zahl innerhalb der ‚Quantität‘ behandelt, des zweiten Abschnitts der Seinslogik, der auf die ‚Qualität‘ folgt. Diese endet mit den Bestimmungen von Eines und Vieles und ihrer nicht zur Synthese gebrachten Relation in Repulsion und Attraktion. Der ‚Die Größe (Quantität)‘ betitelte Abschnitt beginnt mit einem Kapitel über die Quantität als solche, in dem u. a. über kontinuierliche und diskrete Größe gehandelt wird und auf das ein Kapitel über das Quantum folgt; in ihm wird als erstes die Zahl erörtert. Die logische Genese der Zahl wirkt sich dahin aus, daß ihre Hauptmomente „*Einheit*“ und „*Vielheit der Eins*“ sind (5.231); jener entspricht die Kontinuität, dieser die Diskretion. Die vielen Eins sind, da zusammengefaßt, eine Anzahl – eine Anzahl, die in der konkreten Zahl als Einheit auftritt; „*Anzahl und Einheit* machen die *Momente* der Zahl aus“ (5.232). Es ist leicht, in diesen beiden Momenten Platons Prinzipien wiederzuerkennen; statt un-

<sup>63</sup> Hierin liegt auch der Grund, warum Hegel Euklids Verwendung des Begriffs des Deckens bei Kongruenzbeweisen scharf ablehnt: 5.367 f., 6.531; vgl. auch <sup>3</sup>Enz. § 256 Zus.

<sup>64</sup> Es finden sich in der Tat viele Detailsprechungen zu schon bei Platon vorgeformten, in der neuplatonischen Tradition weitergeführten ‚philosophischen Auswertungen‘ mathematischer Phänomene (s. *Höfle*, Grundlegung 190, Anm. 32); prinzipiell neu ist freilich die Bewertung des Infinitesimalen, dem Hegel ja ausführliche Erörterungen gewidmet hat (5.279–372); in irrationalen Werten sieht Hegel entsprechend eine Überschreitung der Sphäre der Endlichkeit und daher – ganz anders als Platon – etwas Positives und Vernünftiges (6.536, <sup>3</sup>Enz. § 231 Anm.). Interessant ist allerdings, daß für Hegel der Limeswert sich als „die Mitte zwischen einem *Größeren* und *Kleineren* auffassen“ läßt (5.353) – man denke an den euklidischen Algorithmus, der wahrscheinlich Platons  $\mu\epsilon\gamma\alpha\text{-}\mu\iota\kappa\rho\nu\acute{o}\nu$  zugrunde liegt (vgl. Anm. 54).

bestimmter Zweiheit heißt es freilich Vielheit (Anzahl) überhaupt<sup>65</sup>. Wie unschwer zu sehen, spielt sich diese Hegelsche Generierung des Begriffs der Zahl auf dem ersten der beiden bei Platon festzustellenden Niveaus ab; die Hegelsche Einführung des Zahlbegriffs erinnert an die sicher in Platons Geist formulierte Definition der Zahl als einer (durch die Einheit) begrenzten Menge<sup>66</sup>. Interessant ist, daß Hegel – über Platon hinaus, aber auf seinen Voraussetzungen aufbauend – aus dieser logischen Struktur des Begriffs der Zahl die Tatsache zu erklären versucht, warum es nur und gerade die drei Grundrechenarten von Addition (bzw. Subtraktion), Multiplikation (bzw. Division) und Potenzierung (bzw. Radizierung) gibt – ein Sachverhalt, der in der Mathematik nie begründet, sondern nur mitgeteilt wird. Hegels Erklärung – über deren Wert hier nicht geurteilt werden soll – lautet folgendermaßen: In der Addition (auf die alle Grundrechenarten zurückgeführt werden können und müssen) – etwa in der Operation  $3 + 4$  – werden verschiedene Zahlen in eine Einheit gefaßt, die erstens nicht in ihrem Wert – dem Momente ihrer Einheit – miteinander identisch sind ( $3 \neq 4$ ); a fortiori kann dann zweitens auch nicht die Anzahl der Summanden (2) mit einem gemeinsamen Wert identisch sein. In der Multiplikation hingegen – z. B. in der Operation  $3 \cdot 2 = 3 + 3$  – sind die Summanden identisch; der Wert ihrer Einheit (3) ist freilich noch verschieden von der Anzahl der Summanden (2). Im Fall einer quadratischen Potenzierung – der Grundform aller Potenzierung – sind schließlich die Momente der Einheit und der Anzahl miteinander identisch ( $3^2 = 3 \times 3 = 3 + 3 + 3$ : in dieser Operation gibt es drei Summanden jeweils mit dem Wert 3). Weil also in der Potenzierung Einheit und Anzahl in Identität gebracht sind, kann es über die Potenzierung hinaus keine weitere Rechenart geben: „Die weitere Gleichheit ist die der Einheit und der Anzahl selbst; so ist der Fortgang zur Gleichheit der Bestimmungen, die in der Bestimmung der Zahl liegen, vollendet.“ (5.241; vgl. <sup>3</sup>Enz. § 102 Anm.)

(2) Erst das späte 19. Jahrhundert hat die Axiome herausgearbeitet, die notwendig sind, um die Sätze der Arithmetik zu beweisen, und zwar ist es der italienische Mathematiker Giuseppe Peano gewesen, der die entscheidenden Arbeiten verfaßt hat<sup>67</sup>. Hier ist das Anliegen verschwunden, die

<sup>65</sup> Der platonische Gedanke einer Reduktion von Vielheit auf Zweiheit ist in Hegels ‚Wissenschaft der Logik‘ nicht eigentlich ‚aufgehoben‘; nur in Hegels Entlarvung des quantitativen unendlichen Progresses als einer ständigen Iteration zweier Bestimmungen (Setzen der Grenze, Aufheben der Grenze) könnte man Platons Einsicht weiterwirken sehen (vgl. 5.264 ff.; <sup>3</sup>Enz. § 104 Anm.). S. auch 6.331 zum Binom als (jeweils iterierter) Grundform des Polynoms.

<sup>66</sup> Vgl. Anm. 43.

<sup>67</sup> *Arithmetices principia nova methodo exposita* (1889) (Anm. 7) II 20–55. Hier haben wir allerdings noch vier Grundbegriffe und neun Axiome. In der zwei Jahre später veröffentlichten Abhandlung ‚Sul concetto di numero‘ (1891; ebd. III 80–109) finden sich hingegen die klassischen drei Grundbegriffe und fünf Axiome, die auch heute in jedem arithmetischen Lehrbuch angeführt werden.



Axiome irgendwie selbst noch philosophisch zu begründen; Peanos Schriften sind rein mathematische Studien, die den Aufbau eines widerspruchsfreien Axiomensystems bezwecken, wie es Ende des letzten Jahrhunderts auch für die Geometrie vorgelegt wurde<sup>68</sup>. Die Axiome sind innerhalb dieses Kalküls unbewiesen und unbeweisbar und die Grundbegriffe undefinierbar; dank ihnen können aber die Theoreme bewiesen und die restlichen Termini definiert werden. Peano verwendet drei Grundbegriffe: 1, Nachfolger und (natürliche) Zahl; 1 ist dabei ein Element,  $N$  eine Menge und Nachfolger eine einstellige Funktion. Die fünf Axiome besagen, daß 1. 1 eine Zahl ist, 2. jede Zahl einen Nachfolger hat, 3. 1 selbst nicht Nachfolger irgendeiner Zahl ist, 4. zwei verschiedene Zahlen nicht denselben Nachfolger haben und 5. Eigenschaften, die auf 1 zutreffen und, wenn sie auf eine Zahl zutreffen, auch auf deren Nachfolger zutreffen, auf alle Zahlen zutreffen (Axiom der vollständigen Induktion)<sup>69</sup>.

Der Geist, der sich in diesen Axiomen ausdrückt, ist, wie gesagt, ein völlig anderer als derjenige, der in Platons (und Hegels) Versuchen einer ontologischen Deduktion der Zahlen präsent ist; dennoch lohnt die Frage, wieviel von Peano in Platons Überlegungen zu einer Generierung der Zahlen vorweggenommen ist. Es versteht sich, daß wir dabei die zweite Stufe von Platons Generierungsmodell ins Auge fassen müssen. Auf dieser geht Platon zunächst einmal von der (durch das  $\epsilon\nu$  erzeugten) Zahl 1 aus, an die sich, mittels der  $\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$   $\delta\nu\acute{\alpha}\varsigma$ , die weiteren Zahlen anschließen. Die  $\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$   $\delta\nu\acute{\alpha}\varsigma$  hat nun nicht die Funktion einer iterierten Addition; eher scheint, wie wir gesehen haben, Platon an Verdopplung gedacht zu haben<sup>70</sup>. Aber wenn auch die  $\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$   $\delta\nu\acute{\alpha}\varsigma$  inhaltlich eine andere Bedeutung hat als Peanos Nachfolgerbegriff, so ist doch formal gesehen ihre Funktion eine verblüffend ähnliche: Sie ‚erzeugt‘ aus der ersten Zahl, aus der Eins, alle Zahlen, zunächst einmal die Zwei, aber auch alle übrigen Zahlen. Peano verwendet drei Grundbegriffe; zwei davon – der Zahlbegriff und der Begriff der Eins – finden sich bei Platon in derselben Bedeutung; zu dem dritten, dem Nachfolgerbegriff hat Platon

<sup>68</sup> D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1899, Stuttgart 10/1968.

<sup>69</sup> Eine formalisierte Fassung der Peano'schen Axiome findet man u. a. bei A. Oberschelp, Aufbau des Zahlensystems, Göttingen 1968, 14 f.

<sup>70</sup> Alexander (In Arist. Metaph. 57, Z. 24–28 Hayduck) berichtet von einer Konzeption, nach der die ungeraden Zahlen durch Addition einer Einheit zu den (durch die  $\delta\nu\acute{\alpha}\varsigma$  erzeugten) geraden Zahlen generiert würden; diese Konzeption ist gewissermaßen eine Mischform zwischen der von Aristoteles Platon zugeschriebenen und der modernen Peanos, weil ihr gemäß bei der Erzeugung der Hälfte der Zahlen eine iterierte Addition eine Rolle spielt. Wahrscheinlich zu Recht hat Gaiser die betreffende Alexanderstelle – gegen Wilpert und mit Robin und Ross – für unplatonisch erklärt (363, Anm. 92). Allerdings hat Aristoteles die Ansicht vertreten,  $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\epsilon\iota\sigma\theta\alpha\iota$   $\tau\omicron\nu\acute{\nu}$   $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\omicron\nu\acute{\nu}$   $\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}$   $\pi\rho\acute{\sigma}\theta\epsilon\sigma\iota\nu$  (Metaph. 1081 b 14), d. h. daß die Zahlen durch iterierte Addition entstünden (Aristoteles fährt fort:  $\omicron\iota\omicron\nu$   $\tau\eta\nu$   $\delta\nu\acute{\alpha}\delta\alpha$   $\pi\rho\acute{\sigma}$   $\tau\omega$   $\epsilon\nu\iota$   $\acute{\alpha}\lambda\lambda\omicron\nu$   $\epsilon\nu\delta\omicron\varsigma$   $\pi\rho\sigma\tau\epsilon\theta\epsilon\nu\tau\omicron\varsigma$ ,  $\kappa\alpha\iota$   $\tau\eta\nu$   $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\delta\alpha$   $\acute{\omega}\sigma\alpha\upsilon\tau\omicron\varsigma$ ); in diesem Punkte steht also er Peano näher als Platon.

immerhin eine Entsprechung mit einer formal ähnlichen Funktion. Übrigens ist es bemerkenswert, daß Peanos Nachfolgerbegriff der einzige seiner drei implizit definierten Grundbegriffe ist, der zweistellig ist, also eine Relation (Funktion) ausdrückt; und analog ist auch die  $\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$   $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$  bei Platon der Ursprung aller Relationen, während die einstelligen Prädikate in der akademischen Kategorienlehre auf das  $\acute{\epsilon}\nu$  zurückgeführt wurden<sup>71</sup>. Peano gelingt es, alle Zahlen durch seine drei Grundbegriffe explizit zu definieren (z. B. 2 als Nachfolger von 1, 3 als Nachfolger von 2 usw.<sup>72</sup>; auch Addition, Subtraktion usw. lassen sich mit den drei Begriffen [rekursiv] definieren); und man wird auch Platon zugeben müssen, daß er auf dem besten Wege dazu war, die unendliche Vielheit der natürlichen Zahlen auf zwei Grundbegriffe zurückzuführen: auf die Eins als Prinzip der Zahlenreihe und auf eine, wie auch immer gestaltete, auf jeden Fall zu iterierende Operation.

Von den Peano'schen Axiomen hat die antike Mathematik, dem Sinn nach, mindestens die drei ersten vorweggenommen; gerade das dritte gibt übrigens der antiken Weigerung, 1 schon zu den Zahlen zu rechnen, einen tiefen Sinn: denn auch für Peano ist die Eins (wenn sie bei ihm auch ausdrücklich eine Zahl ist) doch immerhin durch eine Eigenschaft ausgezeichnet, die innerhalb der natürlichen Zahlen nur ihr zukommt: daß sie zwar einen Nachfolger hat, aber selber kein Nachfolger ist<sup>73</sup>. Und in der Tat ist schon in der Antike genau dies als Grund für die Sonderstellung der  $\mu\omicron\nu\acute{\alpha}\varsigma$  angegeben worden; in Nikomachos' Arithmetik heißt es:  $\mu\delta\nu\omega\tau\acute{\alpha}\tau\eta$   $\delta\acute{\epsilon}$   $\eta$   $\mu\omicron\nu\acute{\alpha}\varsigma$   $\delta\iota\acute{\alpha}$   $\tau\omicron$   $\mu\eta$   $\acute{\epsilon}\chi\epsilon\iota\nu$   $\acute{\epsilon}\kappa\alpha\tau\acute{\epsilon}\rho\omega\theta\epsilon\nu$   $\alpha\upsilon\tau\eta\nu$   $\delta\upsilon\omicron$   $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\omicron\upsilon\varsigma$   $\acute{\epsilon}\nu\omicron\varsigma$   $\mu\omicron\nu\omicron\nu\omicron\upsilon$   $\tau\omicron\upsilon$   $\pi\alpha\rho\alpha\kappa\epsilon\iota\mu\acute{\epsilon}\nu\omicron\upsilon$   $\eta\mu\iota\sigma\upsilon\varsigma$   $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ <sup>74</sup>  $\acute{\alpha}\rho\chi\eta$   $\acute{\alpha}\rho\alpha$   $\pi\acute{\alpha}\nu\tau\omega\nu$   $\phi\upsilon\sigma\iota\kappa\eta$   $\eta$   $\mu\omicron\nu\acute{\alpha}\varsigma$  (I 8; 14, Z. 16 ff. Hoche).

Peanos Nachfolgerbegriff ist, so könnte man sagen, der historische ‚Nachfolger‘ von Platons  $\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$   $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$ ; und man wird wohl nicht übertreiben, wenn man sagt, daß auch in der Arithmetik – und nicht nur in der Geometrie – Platon und die Akademie den axiomatischen Forschungen der modernen Mathematik so nahe gekommen sind wie kaum eine Zeit zwischen den beiden Epochen. In der Tat hat die Geschichte der mathematischen Grundlagenforschung im wesentlichen zwei Höhepunkte aufzuweisen: den einen um 350 v. Chr., den anderen um 1900 n. Chr. – eine Tatsache, die in der Geschichte der exakten Wissenschaften nahezu singulär ist.

<sup>71</sup> Vgl. Anm. 51.

<sup>72</sup> Zu dieser Art der Definition der Zahlen (wobei die Eins undefiniert und undefinierbar bleibt) s. schon *Leibniz*, *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, IV, 7 (Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz, hrsg. von C. J. Gerhardt, Bd. 5, Berlin 1882, Nachdruck Hildesheim 1960, 394).

<sup>73</sup> Auch bei Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Anm. 22), wird die 1 vor den anderen Zahlen „als *Grundelement* von  $\mathbb{N}^*$  (395) ausgezeichnet.

<sup>74</sup> Während die anderen Zahlen die Hälfte der *Summe* ihrer zwei benachbarten Zahlen sind. 1 als Nachfolger von 0 zu interpretieren, wäre ja für die Griechen undenkbar gewesen.

(3) Platon hat den Zahlbegriff auf zwei Prinzipien zurückzuführen versucht; eines dieser Prinzipien bestimmte er als Zweiheit, da sie für ihn die Grundform und erste Gestalt von Vielheit war<sup>75</sup>. Die Generierung der Zahlen stellte er sich entsprechend nach Art einer dualen διαίρεσις vor; und auch bei der Einteilung von Begriffen optierte Platon, wo nur möglich, für Dichotomien<sup>76</sup>. Auch darin ist Platon erstaunlich modern; denn die von Stenzel, Becker u. a. rekonstruierten binären Schemata zur Generierung der Zahlen erinnern auffallend an moderne ‚graphische Bäume‘<sup>77</sup>, auch und gerade was die Grundzahl des Systems betrifft; so wird der Informationsbegriff heute gewöhnlich über binäre Codierungen eingeführt<sup>78</sup>, arbeiten Computer in der Regel auf der Basis eines binären Systems. Sicher hat Platon der Gedanke eines Binärsystems (in dem  $1 = 1$ ,  $10 = 2$ ,  $100 = 4$  ist) noch fernelegen, aber man wird behaupten können, daß er in der Konsequenz seines Ansatzes liegt. Allerdings ist es so, daß Platon zur gleichen Zeit durch seine ontologische Auszeichnung der Zehnzahl eine Scheinbegründung für die angebliche Natürlichkeit des dekadischen Systems gegeben hat; und es ist interessant, daß einer der ersten, die ein Zahlensystem auf nicht-dekadischer Basis entwickelt haben, nämlich Erhard Weigel, gewissermaßen mit platonischen Mitteln gegen Platon kämpft. Freilich ist es eher Aristoteles, mit dem sich Weigel auseinandersetzt; er bemerkt, daß z. B. in der Lehre von den vier Ursachen, von den vier Elementen, aber auch in der Tetras Punkt-Linie-Oberfläche-Körper die Vierzahl eine bedeutende Rolle spielt und schlägt daher ein tetradisches System als ‚natürlicher‘ vor<sup>79</sup>. Freilich gehen Vierzahl und Zehnzahl als philosophisch ‚ausgezeichnete‘ Zahlen auf Platon (und über ihn hinaus auf die Pythagoreer) zurück; ja gerade zwischen diesen beiden Zahlen bestand ein enger Zusammenhang, insofern der Vorrang

<sup>75</sup> Vgl. auch *H. Rickert* 67: „Die Einheit dieses einen und eines andern, ihm gleichen Quantums ... ist dann die kleinste Mehrzahl oder die Zwei“; „daß in der Reihe der ganzen Zahlen keine von der Eins verschiedene Zahl kleiner als die Zwei sein kann, oder daß die Zwei von allen ganzen Zahlen, die größer als die Eins sind, die kleinste sein muß“.

<sup>76</sup> S. etwa die Dihairesen in ‚Sophistes‘ und ‚Politikos‘. Explizit gefordert wird die dichotome Einteilung z. B. *Sph.* 265 e f., *Plt.* 262 b ff., 265 c, 266 a f.

<sup>77</sup> Eine diesbezügliche Assoziation hatte schon *O. Becker*, *Die diairetische Erzeugung* 466 – freilich um sie zu verwerfen.

<sup>78</sup> S. etwa *A. Seiffert*, *Information über die Information*, München 1968, 35 ff.: ‚Die binäre Codierung‘, 47 ff.; ‚Null-Eins-Entscheidungen: Der graphische Baum‘. Zum Binärsystem auf Basis eines Zweierlogarithmus als Grundlage für den Informationsbegriff s. auch *N. Wiener*, *Kybernetik*, Düsseldorf/Wien 1963, 104 ff.

<sup>79</sup> *E. Weigel*, *Tetractys*, Jena 1673, bes. 37 ff. Dazu s. *H. J. Zacher*, *Die Hauptschriften zur Dyadik von G. W. Leibniz. Ein Beitrag zur Geschichte des binären Zahlensystems*, Frankfurt 1973, 31 f.: „Auf der Suche nach einer ‚Vereinfachung‘ der peripatetischen Lehre von den 10 Kategorien stieß er (sc. Weigel) darauf, daß ARISTOTELES selbst zuweilen von nur 4 Grundprinzipien spricht. Da sich die Vierzahl auch in der Natur fand (Himmelsrichtungen, Jahreszeiten, Elemente u. a.), zweifelte WEIGEL an der ‚Natürlichkeit‘ der Zehnzahl, die sowohl in der Philosophie wie auch in der Mathematik so große Schwierigkeiten verursachte. Er verband deshalb die Vierzahl bei ARISTOTELES mit einem mathematischen Vierersystem, entwickelt aus den um die Null ergänzten drei ‚divisores vicarii‘, zur *Tetractys* ...“

der Dekas gerade damit begründet wurde, daß sie die Summe der ersten vier Zahlen sei (336).

Über Weigel hinaus ist es bekanntlich Leibniz gewesen, der das einfachste System, das binäre entworfen hat; wenn auch anzunehmen ist, daß andere damals zirkulierende nicht-dekadische Zahlensysteme ihn mehr beeinflusst haben als dasjenige Weigels<sup>80</sup>, so ist es doch meist Weigel, auf den sich Leibniz in seinen dyadischen Schriften bezieht. „Nous sommes accoutumés“, schreibt Leibniz an die Kurfürstin Sophie von Hannover im April (?) 1706<sup>81</sup>, „à recommencer les chiffres (,) quand nous sommes allés jusqu'à dix. Quelques uns sont allés jusqu'à 12, et d'autres seulement jusqu'à quatre, pour imiter le *Tetractys* de PYTHAGORE. Pour moy j'ay voulu voir ce qui arriveroit, si on n'alloit que jusqu'à deux ...“; und in der ‚Mira numerorum omnium expressio per 1 et 0‘ (vom 17(?)/5/1696)<sup>82</sup> heißt es: „Et quemadmodum aliqui rursus incipiunt ubi *ad quatuor* perventum est, et adhibent tantum characteres 0, 1, 2, 3. Ita simplicissimum et naturae atque origini maxime consentaneum iudicavi, potius incipere denuo ubi pervenitur *ad duo*; itaque duobus tantum opus est characteribus 0 et 1.“ Hier wird der ausdrückliche Anspruch erhoben, das eigene dyadische System sei das einfachste und deswegen natürlichste – ein Anspruch, den man bei Leibniz öfters antrifft<sup>83</sup>. Leibniz – der sich die Bildung der einzelnen Zahlen, unplatonisch, aber modern, nach Art einer iterierten Addition vorstellt<sup>84</sup> – hat bekanntlich seine Dyadik auch philosophisch auszuwerten versucht; die beiden Zeichen 0 und 1 sollten auf die göttliche Schöpfung aus dem Nichts verweisen<sup>85</sup>. Ein Rückgriff auf die in der platonisch-pythagoreisierenden Tradition vorgegebene Auszeichnung der Dyas – analog etwa zu Weigels Anknüpfung an die pythagoreische Tetraktys – findet bei Leibniz allerdings, soweit ich sehe, nicht statt; einen historischen Vorläufer seiner Konzeption hat Leibniz vielmehr im I King entdeckt<sup>86</sup>. Dennoch läßt sich über Weigel ein wenig-

<sup>80</sup> Nach Zachers gründlicher, äußerst informativer Studie (in der in einem Anhang die wichtigsten noch nicht veröffentlichten Schriften Leibnizens zur Dyadik enthalten sind) ist „die Beziehung der Dyadik (sc. Leibnizens) zu einem Zwölfersystem wesentlich enger ... als zur *Tetractys* von WEIGEL“ (21; vgl. 33).

<sup>81</sup> Zum ersten Mal publiziert bei Zacher, 353–355, hier: 353 f.

<sup>82</sup> Zum ersten Mal publiziert ebd. 225–228, hier: 225. Dem entspricht in der deutschen Version („Wunderbarer Ursprung aller Zahlen aus 1 und 0“ vom 18[?]/5/1696, ebd. 229–234) 229 f.

<sup>83</sup> S. etwa ‚Explication de l'arithmétique binaire ...‘ (in: G. W. Leibniz, Mathematische Schriften, hrsg. von C. J. Gerhardt, Bd. 7, Halle 1863, Nachdruck Hildesheim 1962, 223–227), 223 f.: „Mais au lieu de la progression de dix en dix, j'ai employé depuis plusieurs années la progression la plus simple de toutes, qui va de deux en deux, ayant trouvé qu'elle sert à la perfection de la science des Nombres“; 225: „que les nombres étant réduits aux plus simples principes, comme 0 et 1, il paroît partout un ordre merveilleux“.

<sup>84</sup> S. etwa ‚De dyadicis‘ (ebd. 228–234), 228: „Omnis Numerus dyadicus potest exprimi, nullas alias adhibendo notas quam 0 et 1. Nam cum omnis numerus fiat additione continua unitatum, et unitas unitati addita faciat 10 ...“; s. auch Anm. 72.

<sup>85</sup> S. dazu Zacher 34–55.

<sup>86</sup> In diesem berühmten Klassiker der chinesischen Orakelkunst, von dessen Existenz und

stens impliziter Traditionsstrang zu Platon zurückverfolgen, dem das Verdienst zuzusprechen bleibt, wohl als erster die Zweiheit als die einfachste und grundlegende Form von Vielheit erkannt zu haben; hätte daher Platon um die Möglichkeit anderer Zahlensysteme gewußt, hätte er wohl aus philosophischen Gründen für das dyadische optiert<sup>87</sup>.

Es ist schon erwähnt worden, daß Platon aufgrund der Bedeutung der Dyas bei Einteilungen von Begriffen Dichotomien vorzog; daß dies formal immer möglich ist, ist leicht einzusehen (drei Glieder z. B. lassen sich immer nach dem Muster 1,2.1,2.2 ordnen). Freilich stellt sich die Frage, ob derartige Einteilungen auch inhaltlich sinnvoll und fruchtbar sind; und bekanntlich hat Aristoteles heftig gegen Platons Option für Dichotomien bei der Einteilung biologischer Gattungen in Arten polemisiert<sup>88</sup>. Seine Argumente – auf die hier nicht eingegangen werden kann – sind großenteils scharfsinnig; und es spricht für sie, daß Platon selbst öfters bei der Einteilung der Lebewesen Trichotomien verwendet (z. B. Ti. 39ef, Lg. 823b: Land-, Wasser- und Lufttiere). In der Tat hat eine Gattung (bzw. eine Familie, Ordnung usw.) gewöhnlich mehr als zwei Arten (bzw. Gattungen, Familien usw.)<sup>89</sup>. Dennoch scheint es mir im Zusam-

---

Inhalt Leibniz über den Jesuitenpater J. Bouvet erfuh, werden 64 Hexagramme behandelt, die, wie der Name sagt, aus je sechs Linien bestehen; jede Linie ist dabei entweder gebrochen oder ganz; es stehen also zwei verschiedene Zeichen zur Verfügung, aus deren Kombination zu Einheiten von sechs Linien  $2^6 = 64$  Hexagramme hervorgehen. Zu Leibniz' begeisterter Rezeption des I King s. etwa Zacher 72–115 und A. Zemlin, Leibniz und die chinesische Philosophie in: *Studia Leibnitiana*, Supplementa V, Wiesbaden 1971, 15–30, 24f. – Sicher würde sich ein detaillierter Vergleich zwischen der platonischen Zweiprinzipienlehre und dem chinesischen Werk im Sinne einer vergleichenden Philosophiegeschichte lohnen, zumal die beiden Zeichen des I King die ontologischen Prinzipien von Yang und Yin ausdrücken sollen (die Zweiheit der Zeichen des binären Systems hängt also mit der Zweiheit der Prinzipien zusammen, nicht mit der Tatsache, daß ein Prinzip Zweiheit repräsentiert); freilich würde ein solcher Vergleich, um zu seriösen Ergebnissen führen zu können, gute Kenntnisse des kulturellen Kontextes beider Theorien voraussetzen; dem Vf. dieses Aufsatzes ist er daher nicht möglich.

<sup>87</sup> Das Problem, ob ein Zahlensystem vor einem andern ausgezeichnet werden könne, wird immerhin noch in Husserls ‚Philosophie der Arithmetik‘ erörtert, (in: Husserliana XII [Anm. 60] 235 ff.: ‚Die Wahl der Grundzahl des Systems‘; Husserl neigt zu dem dyadischen System als dem einfachsten („Wäre also die Forderung einer möglichst geringen Elementzahl das oberste Prinzip, dann hätte offenbar die Wahl  $x=2$  den größten Vorzug“; 235), macht dann aber einige praktische Einwände gegen dieses System geltend – Einwände, die übrigens nicht unbedingt zutreffen.

<sup>88</sup> Besonders De part. an. A2/3 (vgl. 642b 5ff.:  $\lambda\alpha\mu\beta\acute{\alpha}\nu\omicron\upsilon\sigma\iota\ \delta\prime\ \acute{\epsilon}\nu\iota\omicron\iota\ \tau\omicron\ \kappa\alpha\theta\prime\ \acute{\epsilon}\kappa\alpha\sigma\tau\omicron\nu\ \delta\iota\alpha\iota\rho\acute{\upsilon}\mu\epsilon\iota\omicron\iota\ \tau\omicron\ \gamma\acute{\epsilon}\nu\omicron\varsigma\ \epsilon\iota\varsigma\ \delta\upsilon\omicron\ \delta\iota\alpha\phi\omicron\rho\acute{\alpha}\varsigma\ .\ \tau\omicron\upsilon\tau\omicron\ \delta\prime\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\ \tau\eta\ \mu\acute{\epsilon}\nu\ \omicron\upsilon\ \rho\acute{\alpha}\delta\iota\omicron\nu\ ,\ \tau\eta\ \delta\acute{\epsilon}\ \acute{\alpha}\delta\upsilon\omicron\nu\alpha\tau\omicron\nu\ ;\ 642\ b\ 17\ f\ .\ :\ \eta\ \epsilon\iota\varsigma\ \delta\upsilon\omicron\ \delta\iota\alpha\iota\rho\epsilon\iota\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\tau\alpha\iota\omicron\varsigma\ \acute{\alpha}\nu\ \epsilon\tilde{\eta}\ ;\ 643\ a\ 16\ f\ f\ .\ ,\ 643\ b\ 10\ f\ .\ ,\ 644\ b\ 19\ f\ .\ ;\ zu einer prinzipiellen Kritik des Aristoteles an der akademischen Dihairesis-Lehre s. auch An. Po. B 13, bes. 96b 15ff.). Es ist klar, daß hier Aristoteles Platon (und Speusipp) meint; s. W. Kullmann, *Wissenschaft und Methode*, Berlin/New York 1974, 54ff. und 342ff. Daß die philosophischen Grundlagen der aristotelischen Biologie die platonische Esoterik in vielen Punkten voraussetzen, hat übrigens Krämer 1968 gezeigt (Grundbegriffe akademischer Dialektik in den biologischen Schriften von Aristoteles und Theophrast, in: RMP 111 [1968] 293–333).$

<sup>89</sup> Auch Hegel, für den an sich – wie für Platon – Dichotomien am ‚begriffsgemähesten‘ wären, räumt ein, daß in der Natur eine Gattung gewöhnlich mehr als zwei Arten übergreift, und erklärt dies mit der Kontingenz der Natur: „In der *Natur* finden sich freilich in einer

menhang dieser Arbeit erwähnenswert, daß gerade die Evolutionstheorie eine gewisse Rehabilitierung der platonischen Theorie gebracht hat; dies läßt sich, glaube ich, sagen, auch wenn das Verhältnis von Systematik und Phylogenetik bis heute notorisch umstritten ist<sup>90</sup>. So heißt es z. B. in einer verbreiteten Darstellung der Evolutionstheorie, daß „die graphische Darstellung dieses (sc. des evolutionären) Systems . . . nicht mehr die einer einreihigen Stufenleiter, sondern das dichotom verzweigte Stammbaumschema“ ist<sup>91</sup>. Dies ist um so interessanter, als ja Platon (ganz anders als Aristoteles, aber nach dem Vorbild des Empedokles) evolutionären Vorstellungen nahegestanden zu haben scheint – man denke nur an die ironisch verbrämte Konzeption einer ‚umgekehrten Evolution‘ am Ende des ‚Timaios‘ (90 e ff.). Wir sehen also, daß auch in ihrer realphilosophischen Anwendung Platons Konzeption der Zweiheit als des Ursprungs von Vielheit weniger abstrus, ja weitaus moderner ist, als sie auf den ersten Blick erscheint.

(4) Haben wir in (2) und (3) Detailentsprechungen der modernen Mathematik zur platonischen Auffassung des Ursprungs der Zahlen aufgezeigt, so wollen wir nun nachweisen, daß sich auch in der modernen Philosophie der Mathematik Gedanken finden, die bis in Einzelheiten der platonischen Konzeption nahekommen. Mir geht es hier nicht um die prinzipiellere Frage eines ‚Platonismus in der Mathematik‘, wie man ihn etwa beim frühen Russell oder bei Whitehead findet<sup>92</sup>; ich möchte nur auf die bisher noch nicht bemerkte Tatsache aufmerksam machen, daß die Überlegungen Brouwers zu den Grundlagen der Mathematik ja um eine ‚two-ity‘ kreisen, die eine der platonischen  $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$  ganz entsprechende Funktion zu erfüllen hat. Der große niederländische Mathematiker Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) ist bekanntlich einer der brillantesten und originellsten Vertreter des (Neo)intuitionismus, einer der drei wichtigsten Positionen innerhalb der mathematischen Philosophie unse-

---

Gattung mehr als zwei Arten . . . Es ist dies die Ohnmacht der Natur, die Strenge des Begriffs nicht festhalten und darstellen zu können und in diese begrifflose blinde Mannigfaltigkeit sich zu verlaufen.“ (6.282) Dennoch optiert Hegel zumindest bei Makroeinteilungen für Dichotomien: <sup>3</sup>Enz. § 280 Zus. (9.133), § 368 mit Zus. (9.500 f., 508 f.).

<sup>90</sup> S. nur W. Zimmermann, Methoden der Phylogenetik, in: Die Evolution der Organismen, hrsg. von G. Heberer, 2 Bde., Stuttgart 1959, 76: ‚Systematik und Phylogenetik‘ sowie, grundlegend, W. Hennig, Phylogenetic Systematics, Urbana/Chicago/London 1979 (dt. Berlin/Hamburg 1982).

<sup>91</sup> R. Siewing, Biologische Evolution – Einführung in die Problematik, in: ders. (Hg.), Evolution, Stuttgart/New York 1978, 95–118, 103. – Neben der Dichotomie spielt übrigens auch der Begriff der Radiation in der phylogenetischen Systematik eine große Rolle; zum Verhältnis beider Begriffe s. etwa Hennig, 209–216: ‚Dichotomy and Radiation‘. – Ich bin Herrn Siegfried Roth für zahlreiche Hinweise auf diesem Gebiet zu Dank verpflichtet.

<sup>92</sup> S. A. N. Whitehead, Mathematics and the Good (1941), in: ders., Science and Philosophy, New York 1948, 105–121 (dt. in: ders., Philosophie und Mathematik, Wien 1949, 69–90). Whitehead spielt am Anfang seines Aufsatzes auf Platons öffentliche Vorlesung  $\text{Περὶ τὰ γὰ θοῦ}$  an, geht aber nicht konkret auf Platons esoterische Lehre ein, auch nicht was ihren mathematischen Aspekt angeht.

res Jahrhunderts (neben Logizismus und Formalismus). Mir kann es hier nicht darum gehen, auch nur die wichtigsten Gedanken Brouwers darzulegen, so etwa seine berühmte Kritik am tertium non datur und seine daraus resultierende Ablehnung des indirekten Beweises; ich beschränke mich vielmehr auf ein Referat seiner Auffassung von dem Ursprung der mathematischen Entitäten<sup>93</sup>.

Nach Brouwer trennt der erste Akt des Intuitionismus die Mathematik völlig von der mathematischen Sprache. Dieser Akt begreift die Mathematik als eine sprachlose Tätigkeit des Geistes, der die Wahrnehmung einer zeitlichen Bewegung zugrunde liegt, die ein Lebensmoment in zwei Teile spaltet, deren erster im Gedächtnis festgehalten wird<sup>94</sup>. Wird nun diese Zweiheit aller Qualitäten entkleidet, so bleibt nur „the common substratum of all two-ities, the mental creation of the *empty two-ity*.“ (op. cit. 523) Diese leere Zweiheit und die beiden Einheiten, aus denen sie besteht, konstituieren nun die grundlegenden mathematischen Systeme<sup>95</sup>; und zwar werden zunächst die natürlichen Zahlen generiert. Brouwer stellt sich das im einzelnen so vor, daß die Zweiheit selbst „als eines der Glieder einer neuen Zweiheit“ aufgefaßt wird, „womit die zeitliche Dreiheit geschaffen ist, usw. In dieser Weise entsteht mittels Selbstentfaltung des intellektuellen Urphänomens die *zeitliche Erscheinungsfolge beliebiger Vielfachheit*.“<sup>96</sup> Entscheidend ist der Gedanke einer „reiteration of this two-ity-phenomenon“<sup>97</sup>; damit gelangt Brouwer zur Unendlichkeit der natürlichen Zahlen, aber auch – jedenfalls ist dies Brouwers Anspruch, ohne daß er das genauer ausführt – zu derjenigen aller übrigen mathematischen Entitäten. „Es ist dieses gemeinsame Substrat aller Zweheiten,

<sup>93</sup> Zu einer umfassenden Darstellung des Intuitionismus s. etwa *A. Heyting, Intuitionism. An Introduction*, Amsterdam 1956, <sup>2</sup>1966, <sup>3</sup>1971.

<sup>94</sup> S. etwa *Points and Spaces* (1954), jetzt in: *L. E. J. Brouwer, Collected works*, Bd. 1: *Philosophy and foundations of mathematics*, ed. by A. Heyting, Amsterdam/Oxford 1975, 522–538, 523. – In der Ableitung der Mathematik – und d. h. zunächst: der Zahlen – aus dem Zeitbegriff erinnert Brouwer an Kant (vgl. *KdV A 142 f./B 182; Prolegomena § 10*); freilich „erkennt Brouwer nur die Anschauung der Zeit an“, während bei Kant auch noch die Raumschauung für die Mathematik, d. h. für die Geometrie, konstitutiv ist (s. *P. Bernays, Über den Platonismus in der Mathematik*, in: *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Darmstadt [1976] 62–78, 69). „*The only a priori element in science is time*“, schrieb Brouwer schon in seiner aufsehenerregenden Dissertation ‚Over de grondslagen der wiskunde‘ von 1907. (Ich zitiere nach der englischen Übersetzung – ‚On the foundations of mathematics‘ –, *Collected works* 11–101, hier: 61).

<sup>95</sup> Ebd. S. die ähnlichen Formulierungen in dem Aufsatz ‚Historical background, principles and methods of intuitionism‘ (1952), *Collected works* 508–515, hier: 510: „If the two-ity thus born is divested of all quality, there remains the empty form of the common substratum of all twoities. It is this common substratum, this empty form, which is the basic intuition of mathematics.“ (Original kursiv)

<sup>96</sup> *Mathematik, Wissenschaft und Sprache* (1929) *Collected works* 417–428, hier: 417. Zur Konzeption einer Selbstentfaltung der Zweiheit s. auch *Richtlinien der intuitionistische wiskunde* (1947), engl. Übs. in: *Collected works* 477.

<sup>97</sup> *Consciousness, philosophy, and mathematics* (1948), *Collected works* 480–494, hier: 480.

das die *Urintuition der Mathematik* bildet, deren Selbstentfaltung u. a. das Unendliche als gedankliche Realität einführt, und zwar in hier nicht näher zu erörternder Weise zunächst die Gesamtheit der natürlichen Zahlen, sodann diejenige der reellen Zahlen und schließlich die ganze reine Mathematik liefert.“<sup>98</sup> An diesen ersten Akt des Intuitionismus schließt sich nun nach Brouwer ein zweiter an; innerhalb dieses zweiten Aktes geht es u. a. um die Prädikate, die mathematischen Entitäten zu- oder abgesprochen werden. Wichtig wird in diesem Zusammenhang die Kategorie der Gleichheit; die mathematischen Prädikate haben nämlich die Bedingung zu erfüllen, „that, if they hold for a certain mathematical entity, they also hold for all mathematical entities which have been defined to be *equal* to it, equality having to be symmetric, reflexive, and transitive.“<sup>99</sup> Freilich kann Gleichheit auf keinen Fall hergestellt werden zwischen der leeren Zweiheit und der leeren Einheit; zwischen diesen beiden besteht ein unüberbrückbarer Dualismus. Der eben zitierte Satz fährt fort: „... and the empty two-ity being forbidden to be equalized to an empty unity.“

Man erkennt leicht, wieviel von dem eben Zitierten im Grunde platonisch ist – die Bedeutung einer „empty two-ity“, die durch iterierte ‚Selbstentfaltung‘ die natürlichen Zahlen, aber auch die übrigen mathematischen Entitäten generiert<sup>100</sup>, ebenso wie der Dualismus von Einheit und Zweiheit. Dies ist um so überraschender, als ja Brouwers Intuitionismus gerade durch die Gegenstellung zum Platonismus der klassischen Mathematik gekennzeichnet ist<sup>101</sup>: Brouwer lehnt die Ontologisierung mathematischer Entitäten entschieden ab; sie werden nach ihm durch einen psychologischen Bewußtseinsakt erzeugt, mit dem sie tendenziell sogar identifiziert werden. Zu diesem Psychologismus gehört die ständige

<sup>98</sup> Mathematik, Wissenschaft und Sprache 418 f.

<sup>99</sup> Points and Spaces 523.

<sup>100</sup> Wir sehen hier – sozusagen aus historischer Distanz – nochmals, daß im Begriff der ὀρίστος δύάς durchaus die Kraft liegt, die der griechischen Mathematik eigentümliche Beschränkung des Zahlbegriffs auf die natürlichen Zahlen aufzulösen, sichert er doch eine gewisse Kontinuität zwischen den natürlichen Zahlen  $> 1$  und selbst irrationalen Werten. – Es ist interessant, daß auch der von Platon mit der ὀρίστος δύάς synonym verwendete Begriff μέγα-μικρόν historisch zu fassen ist bei einem Autor noch des 19. Jahrhunderts, und zwar ebenfalls als Prinzip von rationalen und irrationalen Werten – ich denke an *J. F. Herbart*, bei dem es heißt: „Endlich der eigentlich wissenschaftliche Begriff der Zahl, welcher kein anderer als der des Mehr und Minder, und dabei empfänglich ist nicht nur für alle Brüche, sondern auch für alle irrationale Grössen: dieser ist von noch früherem Ursprung als die ganzen Zahlen.“ (Sämtliche Werke, hrsg. von G. Hartenstein, Sechster Band: Schriften zur Psychologie, Zweiter Theil, Leipzig 1850: Psychologie als Wissenschaft, neu gegründet auf Erfahrung, Metaphysik und Mathematik, Zweiter, analytischer Theil, 150) Freilich ist Herbart's Zahlbegriff durch Welten von dem platonischen getrennt, weil er erstens psychologisch begründet wird und zweitens, aus eben diesem Grunde, bei der Vielheit und nicht bei der Eins ansetzt (ebd. 148 ff.).

<sup>101</sup> Freilich stimmt die griechische Mathematik mit dem Intuitionismus in der Ablehnung des Aktual-Unendlichen überein.



Hervorhebung der Bedeutung der Zeit für die mathematische Intuition; es ist hingegen klar, daß für Platon Mathematik mit Zeitlichkeit nicht nur nichts zu tun hat, sondern daß mathematische Entitäten das gerade Gegenteil von zeitlich, nämlich ewig sind. (Freilich verbindet Brouwers gegen Kant gerichtete Ablehnung des Raumes als eines Anschauungsapriori für die Mathematik ihn immerhin negativ mit Platon, insofern nach ihm die Arithmetik rein aus sich selbst ohne Rückgriff auf geometrische Vorstellungen entwickelt werden muß.) Noch ferner läge Platon Brouwers lebensphilosophische Ausrichtung<sup>102</sup>; nicht nur will Brouwer die Mathematik primär als historisches Phänomen fassen; er sieht sie ausdrücklich im Dienste des Lebens, „als Willensakt im Dienste des Selbsterhaltungstriebes des einzelnen Menschen“<sup>103</sup>. Dennoch ist nicht zu verkennen, daß in der konkreten Beschreibung zumal des ersten intuitionistischen Aktes Brouwer bis in Einzelheiten den Konzeptionen des esoterischen Platons nahekommt – was ihm selbst freilich nicht bewußt ist. Das läßt sich primär mit dem Zwang der Sache erklären; möglicherweise aber liegt ein vermittelter Einfluß vor – und zwar ein über Hegel vermittelter. F. Kambartel hat jedenfalls in seiner Abhandlung ‚Philosophische Perspektiven der Diskussion um die Grundlagen der Mathematik‘<sup>104</sup> völlig zu Recht in Brouwers Philosophie der Mathematik mehr Hegelsches als Kantisches sehen wollen<sup>105</sup> und die Vermutung aufgestellt, daß „der Intuitionismus ... wesentlich auf einer Hegelrezeption fußt, für die im holländischen Neuhegelianismus ein geeigneter Vermittler gegeben wäre“ (173) – eine Vermutung, die Kambartel dadurch stützt, daß er darauf verweist, daß auch in einem holländischen Rechenwerk der Zeit der Zahlbegriff ganz nach Art Hegels eingeführt wurde. In der Tat können die oben dargestellten Überlegungen Brouwers einen Zusammenhang zur idealistisch-spekulativen Tradition nicht verleugnen – trotz des psychologistischen Gewandes, in dem sie auftreten; statt einer idealen, ontischen Entität wie Platons  $\delta\upsilon\acute{\alpha}\xi$  ist ja Brouwers ‚two-ity‘ ein psychologischer Akt. Treffend hat daher Kambartel in seinem Aufsatz den Abschnitt über den Intuitionismus ‚Identitätsmathematik und Psychologismus‘ betitelt (169) – sind doch damit die beiden, im Grunde einander widerstrebenden Momente des Intuitionismus prägnant angegeben; und das erste Moment verweist über Hegel auf Platon zurück.

Wir können nun auch die Frage beantworten, welcher der drei Grundrichtungen der modernen Philosophie der Mathematik die platonische

<sup>102</sup> S. etwa Brouwers frühe Schrift ‚Leen, Kunst en Mystiek‘, Delft 1905, Collected works 1–10, die auszugsweise ins Englische übersetzt ist.

<sup>103</sup> Mathematik, Wissenschaft und Sprache 417. S. auch Consciousness, philosophy, and mathematics.

<sup>104</sup> AGPh 45 (1963) 157–193.

<sup>105</sup> „Häufig scheinen die intuitionistischen Thesen der idealistischen Philosophie, insbesondere Hegel, näher zu stehen als Kant.“ (171)

mathematische Philosophie am ehesten zugerechnet werden kann. Zunächst scheidet der Formalismus aus; ist doch diese Richtung auf eine möglichst uneingeschränkte Selbständigkeit der Mathematik erpicht – Konsistenz genügt als Kriterium für Wahrheit, entgegengesetzte, aber gleichermaßen konsistente Systeme gelten als gleich wahr, und an einer philosophischen Begründung der Mathematik besteht demgemäß kein Interesse<sup>106</sup>. Der Logizismus schiene sich eher anzubieten; verbindet doch das Ziel, die Mathematik über die Logik zu begründen, diese Richtung mit Platon ebenso wie seine antipsychologistische, antihistoristische Stoßrichtung. Dennoch kann nicht übersehen werden, daß die Logik, von der aus Platon die Mathematik begründen will, nicht die moderne formale Logik ist (der eine zufriedenstellende Begründung der Mathematik bisher auch noch nicht gelungen ist); es ist vielmehr eine inhaltlich belastete Logik – die dialektische Metaphysik der Prinzipien. Diese Prinzipien findet man, was ihren materialen Gehalt angeht, am ehesten im Intuitionismus Brouwers wieder; freilich ist hier ihre ontologische Stellung verlorengegangen; an die Stelle eines überindividuellen (göttlichen) Denkens tritt die psychologische Intuition. Es ließe sich daher, etwas vereinfacht, sagen, daß in Logizismus und Intuitionismus je eine Hälfte der platonischen Philosophie der Mathematik weiterwirkt – im Logizismus eher ihr formaler, im Intuitionismus eher ihr materialer Aspekt; und wenn man nach einer Philosophie der Mathematik Umschau hält, in der diese beiden Aspekte noch vereint sind, wird man auf Hegels Philosophie der Mathematik zurückverwiesen. Ob der neuerwachte Neohegelianismus sich des platonisch-Hegelschen Ansatzes auch in seinem Bezug auf die Mathematik annehmen wird – was freilich bisher noch nicht geschehen ist?

Es kann hier nicht darum gehen, diese Frage zu beantworten; mein Anliegen in diesem Aufsatz war es nur, zu zeigen, daß Whiteheads bekannte Äußerung, die abendländische Philosophie bestehe aus einer Reihe von Fußnoten zu Platon, auch Platons esoterische Theorie von der Erzeugung der unendlichen Vielheit der Zahlen aus Einheit und Zweiheit umfaßt: nicht nur historische ‚Spuren‘, sondern auch systematisch-logische Grundstrukturen dieser Theorie lassen sich immerhin über einen Zeitraum von fast zweieinhalbtausend Jahren in den wichtigsten mathematischen und philosophischen Arbeiten nachweisen, die sich dieses Themas

<sup>106</sup> Wahrscheinlich kann Eudoxos als Vorläufer des Formalismus angesehen werden, gebraucht er doch sogar schon implizite Definitionen (s. Anm. 7) – wie etwa Hilbert in den ‚Grundlagen der Geometrie‘, der deswegen von dem Logizisten *G. Frege* scharf kritisiert wurde (Über die Grundlagen der Geometrie, in: Kleine Schriften, Darmstadt 1967, 262–323). Daß freilich Platon wie Frege (und anders als Hilbert) von der notwendigen Unizität der Geometrie überzeugt war, kann nicht bezweifelt werden; allerdings erkannte wohl Platon an, daß von einem formallogischen Standpunkt aus gegen nicht-euklidische Geometrien nichts eingewendet werden könne.

angenommen haben. Freilich wird man einräumen müssen, daß Platon nicht nur mit genialem Griff bedeutende Strukturen herausgearbeitet hat – so handelt es sich bei der Zweiheit wohl tatsächlich um eine Struktur, der eine Relevanz innerhalb einer ‚Logik der Vielheit‘ schwerlich abzusprechen sein dürfte<sup>107</sup> –, sondern daß er auch vorschnell Kontingentes – wie etwa die Dekas – dogmatisch hypostasiert hat; freilich verdienen auch solche Hypostasierungen, wenn man sie auch sachlich ablehnen muß, doch allein wegen ihrer Wirkungsgeschichte zur Kenntnis genommen zu werden. Jedoch wird man anerkennen müssen, daß auch und gerade Platons Philosophie der Zahlen nicht nur (und nicht einmal in erster Linie) aus derartigen Hypostasierungen besteht, die bloß historisches Interesse beanspruchen können; und wenn dieser Aufsatz den Leser überzeugen konnte, daß Thema der ungeschriebenen Lehre nicht Abstrusitäten sind, sondern Probleme und Lösungsversuche, die (wenn man nur die Geduld hat, sich auf sie einzulassen) bei ihrem Verfasser eine erstaunliche denkerische (und auch einzelwissenschaftliche, in diesem Fall mathematische) Kraft offenbaren, so hätte er seinen Zweck erfüllt.

<sup>107</sup> Über das bloß Mathematische und Mathematikphilosophische hinaus könnte man sich die Frage stellen, ob nicht die Auszeichnung der Zweiheit als der Grundform von Vielheit nicht auch von Bedeutung ist für ein wichtiges realphilosophisches Problem – ich meine die Begründung dualer Sozialität (Ehe, Freundschaft) als eines wichtigen Falls von Sozialität überhaupt – neben dem der pluralen, politischen. (So schon bei Aristoteles – s. nur die berühmte Äußerung EN 1162 a 17 ff.: ἀνθρώπος γὰρ τῇ φύσει συνδυαστικὸν μᾶλλον ἢ πολιτικόν –; doch das Thema ist natürlich auch heute noch Gegenstand einer jeden Sozialphilosophie – s. etwa K. Hartmann, Politische Philosophie, Freiburg/München 1981, 20–30: ‚Duale Sozialität‘; 31–43: ‚Plurale Sozialität‘.) Vf. arbeitet z. Z. an einer Studie zur Theorie der Intersubjektivität, in der er auch die Frage diskutiert, ob nicht die duale Intersubjektivität anders als über bloße anthropologische Bedürfnisse, nämlich ontologisch begründet werden kann.