ThPh 64 (1989) 23–52

Beweistheorie, Mathematik und Syllogistik

Zum Problem ihres Verhältnisses in Aristoteles' Zweiten Analytiken

Von Michael Bordt

Einleitung [1]

Jonathan Barnes vertritt in seinem Aufsatz „Proof and the Syllogism“ [2], daß die Beweistheorie der Zweiten Analytiken des Aristoteles von der Syllogistik der Ersten Analytiken sachlich unabhängig ist. Ein wichtiger Grund, diese Unabhängigkeit zu behaupten, liegt für ihn in der Verbindung von griechischer Mathematik und Aristotelischer Beweistheorie; zwar sei die damalige mathematische Praxis einer der wichtigsten Anstöße für die Beweistheorie des Aristoteles gewesen, aber es sei offensichtlich, daß die Syllogistik der Ersten Analytiken ungeeignet für die Formalisierung auch nur des einfachsten geometrischen Beweises sei. Die Syllogistik sei ein kleiner und relativ unbedeutender Teil der mathematischen Beweismethode. Die Mathematiker, die versuchten, ihre Argumente in syllogistische Form zu bringen, müßten damit scheitern [3]. Die Unmöglichkeit syllogistischer Formulierung mathematischer Argumente zeige sich besonders an der Aristotelischen Konzeption der Prinzipienlehre. Am Beispiel der Aristotelischen Axiome versucht Barnes zu zeigen, daß die Prinzipien unmöglich Sätze eines Syllogismus sein können, weil sie sich der für einen Syllogismus erforderlichen Formulierung widersetzen.

Dieser Einwand gegen die Aristotelische Beweistheorie ist nicht neu. Bereits 1974 hatte Jaakko Hintikka im Anschluß an eine Kritik an seinem Aufsatz „On the Ingredients of an Aristotelian Science“ [4] erklärt, es sei „crystal clear“, daß Aristoteles keine klare Vorstellung davon gehabt haben könne, wie man auf dem Fundament der Syllogistik eine mathematische Wissenschaft wie die der Geometrie aufbauen könne, weil dieses einfach unmöglich sei [5].

Ziel der vorliegenden Abhandlung ist es, den Einwand, die Aristotelische Beweistheorie sei prinzipiell nicht auf die Mathematik anwendbar, zu entkräften. Ich werde zu zeigen versuchen, daß die logische Struktur eines für Aristoteles wichtigen mathematischen Beweises adäquat mit Hilfe des Syllogismus dargestellt werden kann und daß die Axiome Sätze

---

[1] Besonderen Dank schulde ich Friedo Ricken SJ, der im Wintersemester 1985/86 an der Hochschule für Philosophie in München ein Seminar über die Zweiten Analytiken gehalten hat. Ohne seine stete Ermutigung und Kritik wäre diese Abhandlung nicht möglich gewesen.

[2] *J. Barnes*, Proof and the Syllogism, in: E. Berti (Hrsg.), Aristotle on Science – The „Posterior Analytics“, Padova 1981, 17–59.

[3] Ebd. 18f.

[4] *J. Hintikka*, On the Ingredients of an Aristotelian Science, in: Noûs 6 (1972) 55–69.

[5] *J. Hintikka*, Reply to Dorothea Frede, in: Synthese 28 (1974) 91–96; hier 94.

in einem Syllogismus sein können. Dazu werde ich in den ersten beiden Teilen der Abhandlung zunächst die wichtigsten Elemente der Aristotelischen Beweistheorie analysieren. Der dritte Teil behandelt die Art der Notwendigkeit einer Conclusio eines wissenschaftlichen Beweises. Wir werden sehen, daß die Irritation der meisten Interpreten über das Aristotelische Standardbeispiel einer Conclusio, daß nämlich die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks der Summe zweier Rechter Winkel gleich ist, auf einer falschen Analyse des an-sich Verhältnisses der Terme in der Conclusio beruht. Im vierten Teil wird dann anhand eines Beweises des Satzes über die Innenwinkelsumme eines Dreiecks gezeigt werden, wie die Prinzipien der Aristotelischen Beweistheorie in einen Beweis eingehen und welche Funktion die syllogistische Struktur in einem mathematischen Beweis hat.

I. Teil: Vom Begriff des Wissens zur Prinzipienlehre

1. Der Begriff des Wissens (A 2, 71 b 9–16)

Aristoteles bestimmt den Begriff der Wissenschaft vom Begriff des Wissens her. Wenn bestimmte Kriterien des Wissens erfüllt sind, dann ist das Objekt des Wissens ein wissenschaftlicher Satz. Diese den wissenschaftlichen Sätzen zugeordnete Wissensform unterscheidet Aristoteles als Wissen im eigentlichen Sinn von sophistischem Wissen (A 2, 71 b 9–12).

Er definiert den Begriff des Wissens im eigentlichen Sinn wie folgt: „Wir glauben aber etwas zu wissen, [...] wenn wir den Grund zu wissen glauben, durch den die Sache ist, [und] daß es dieser Grund ist, und [wenn wir wissen,] daß dieses sich nicht anders verhalten kann" (A 2, 71 b 9–12). Eine Person A weiß einen Satz 'p' im eigentlichen Sinn also genau dann, wenn A in der Lage ist, 'p' zu begründen, und weiß, daß p sich unmöglich anders verhalten kann. Wenn p sich unmöglich anders verhalten kann, dann ist 'p' ein notwendiger Satz (A 4, 73 a 21–23). Ein wissenschaftlicher Satz muß also zwei Kriterien erfüllen: Er muß begründbar und notwendig sein.

2. Wissen durch Beweis (A 2, 71 b 16–19)

Eine Art und Weise, 'p' im eigentlichen Sinn zu wissen, ist die durch einen Beweis. Ein Beweis ist ein wissenschaftlicher Syllogismus (A 2, 71 b 18). Er unterscheidet sich von einem nicht-wissenschaftlichen Syllogismus dadurch, daß die Conclusio eines wissenschaftlichen Syllogismus entweder aus wahren und ersten Sätzen oder aus von wahren und ersten Sätzen gefolgerten Sätzen gewonnen wird (Top. A 1, 100 a 27–30). Die wahren und ersten Sätze nennt Aristoteles Prinzipien (ἀρχαί). Prinzipien sind also erste Sätze, die als Prämissen eines Syllogismus stehen und garantieren, daß die Conclusio ein wissenschaftlicher Satz ist.

Diese Andeutungen im ersten Kapitel der Topik werden in den Zweiten Analytiken A 2 entfaltet. Aristoteles untersucht, welche Eigenschaften die Prinzipien in einem wissenschaftlichen Syllogismus haben müssen, damit die Conclusio diejenigen Bedingungen erfüllen kann, die notwendig erfüllt sein müssen, um die Conclusio im eigentlichen Sinn wissen zu können. Die Eigenschaften der Beweisprinzipien ergeben sich also aus der Definition des Wissens.

3. Die Prinzipien eines Beweises (A 2, 71 b 19 – 72 a 5)

Diejenigen Prämissen in einem Beweis, die Prinzipien sind, müssen wahr, erste, unvermittelt, bekannter und früher als die Conclusio sein und die Conclusio begründen (A 2, 71 b 20–22).

Die Prinzipien müssen wahr sein, damit die Conclusio wahr ist. Die Conclusio muß wahr sein, weil man nur das wissen kann, was wahr ist, denn aus der Wahrheit von „A weiß, daß 'p'“ folgt analytisch die Wahrheit von 'p'. Eine Prämisse 'q' ist dann ein erster Satz, wenn es keinen Beweis gibt, der 'q' als Conclusio hat. Als erster Satz ist 'q' eines Beweises nicht fähig (ἀναποδείκτος). Daß 'q' unvermittelt ist, folgt aus seiner Eigenschaft, ein erster Satz zu sein, denn es gibt keinen Mittelterm B, mit dessen Hilfe ein Beweis geführt werden könnte, daß AaC (= 'q') der Fall ist.

Ein Prinzip muß bekannter (bzw. zuvorerkannt [προγινωσκόμενα] 71 b 31 f) sein. Das heißt, daß wir es auf eine andere Weise als die Conclusio wissen müssen. Die Wissensform, die dem Prinzip hier zugeordnet ist, ist die des Vorwissens. Wenn A ein Vorwissen von 'q' hat, dann muß A wissen, daß 'q' ist (ὅτι ἔστι) und was das Gesagte bedeutet (τί τὸ λεγόμενόν ἐστι 71 a 11–17). Zwar ist das „ist“ in „daß es ist“ zweideutig, weil, wie die beiden Beispiele, die Aristoteles bringt, zeigen, daß „ist“ sowohl existentiell als auch veritativ verstanden werden kann. Wenn 'q' aber ein Aussagesatz ist, kann „ist“ nur veritative Bedeutung haben. Ein Vorwissen einer Prämisse, die ein Prinzip ist, zu haben heißt also, die Bedeutung der in der Prämisse vorkommenden Terme zu kennen und zu wissen, daß die Prämisse wahr ist[6].

In welchem Sinn die begründenden Sätze früher sind, hat Kurt von Fritz sehr gut interpretiert. Er weist darauf hin, daß es trivial wäre, wenn Aristoteles nur meinen würde, „daß in der logischen Schlußfolgerung der logische Grund der logischen Folge vorangehen muß“[7]. Er meint vielmehr, „daß das als Prinzip Angenommene in sich einsichtiger, einfacher und abstrakter sein muß als das, was daraus abgeleitet wird“[8]. Von Fritz

[6] Bei der Interpretation von „τί τὸ λεγόμενόν ἐστι“ bleibt offen, ob Aristoteles meint, daß A ein Vorwissen vom Sprachgebrauch (A muß die Bedeutung der Terme kennen) oder ein Vorwissen über das Wesen des Gesagten haben muß.

[7] *K. v. Fritz*, Die APXAI in der griechischen Mathematik, in: *ders.*, Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft, Berlin/New York 1971, 335–429; hier: 345.

[8] Ebd. 346.

verweist dazu auf Met. VII 10, 1035 b 4 ff, wo Aristoteles schreibt, daß (in bezug auf geometrische Gegenstände) der Rechte Winkel früher gegenüber dem spitzen und dem stumpfen Winkel ist, da diese beiden Winkel durch den Rechten Winkel definiert werden[9]. Diese Interpretation bestätigt sich an der Aristotelischen Unterscheidung der beiden Gebrauchsweisen von „früher und bekannter" (71 b 33 – 72 a 5): Die konkreten Dinge der sinnlichen Wahrnehmung sind zwar für uns früher, nicht aber von Natur aus. Das Allgemeinste, Abstrakteste ist von Natur aus früher und bekannter, nicht aber für uns.

Nachdem Aristoteles die Eigenschaften, die ein Prinzip haben muß, abgehandelt hat, untersucht er, was für eine Art von Satz diejenigen Sätze sind, die er Prinzipien nennt. Hierzu knüpft er an die Terminologie von De Interpretatione an. Ein Prinzip ist eine ἀπόφανσις (72 a 11), was in De Int. 17 a 22–24 als eine sinnvolle Wortverbindung definiert wird, die aussagt, daß etwas der Fall oder nicht der Fall ist. Eine ἀπόφανσις ist also ein Aussagesatz, in dem „eines von einem" ausgesagt wird. Sie hat einen Wahrheitswert und unterscheidet sich so von anderen Satzarten.

II. Teil: Die Differenzierung der Prinzipien

Ziel des zweiten Teils der Abhandlung ist es, die verschiedenen Arten von Prinzipien eines wissenschaftlichen Beweises zu untersuchen. In Anal. post. A 2, 72 a 14–18 unterscheidet Aristoteles zwei Arten von Prinzipien: Thesen (θέσεις) und Axiome (ἀξίωμα). Unterscheidungskriterium ist, ob die Kenntnis eines Prinzips notwendig ist, um etwas lernen zu können. Die Kenntnis der Axiome ist Voraussetzung jeglichen Lernens, die Kenntnis der Thesen dagegen nicht.

Die Thesen unterteilt Aristoteles (72 a 18–24) in Hypothesen (ὑπόθεσεις) und Definitionen (ὁρισμοίς). Hypothesen sind Sätze, die aussagen, daß etwas ist oder daß etwas nicht ist (τὸ εἶναί τι ἤ τὸ μὴ εἶναί τι). Definitionen sind Sätze, die die Bedeutung bestimmter Terme festlegen, ohne dabei eine Behauptung über Sein oder Nichtsein zu machen. Aristoteles unterscheidet also drei Arten von Prinzipien voneinander: Axiome, Hypothesen und Definitionen.

1. Die Axiome eines Beweises

Es ist in der Forschung weithin unklar, was für eine Art von Satz ein Axiom ist und welche Funktion es in einem Beweis erfüllt. W. D. Ross meint in seinem Kommentar zu den Analytiken, Axiome seien „the most fundamental starting-points of all"[10]. Aus diesen obersten „starting-points" ließen sich dann – so Ross – andere Sätze folgern. Als Beispiel ei-

---

[9] Ebd.
[10] *W. D. Ross,* Aristotle's Prior and Posterior Analytics, Oxford 1949, hier: 531.

nes Axioms bringt Aristoteles häufig folgenden Satz: „Gleiches, von Gleichem abgezogen, läßt Gleiches" (76a 41, 76b 20f, 77a 31). Ross macht nicht verständlich, wie es möglich sein soll, aus diesem Axiom andere Sätze zu folgern. Für Hintikka sind Axiome „assumptions on which the whole structure of Aristotelian syllogisms is based"[11]. Das Problem dieser Interpretation ist, daß Hintikka den Strukturbegriff nicht klärt und unklar bleibt, was etwa das zitierte Aristotelische Axiom genau mit der Struktur eines Syllogismus zu tun hat.

Um den Begriff des Axioms zu klären, wollen wir zunächst von der Frage absehen, welche Funktion ein Axiom in einem Beweis bzw. einem wissenschaftlichen Syllogismus hat. In Anal. post. A 10 unterscheidet Aristoteles zwischen allgemeinen und einer Wissenschaft eigenen Prinzipien. Die Unterscheidung zwischen Thesen und Axiomen aus A 2 ist mit dieser Unterscheidung identisch. Axiome sind also allgemeine Prinzipien. Um zu verstehen, worin die Allgemeinheit der Axiome beruht, muß etwas weiter ausgeholt werden. Das Aristotelische Beispiel für ein Axiom findet sich auch als dritter allgemeiner Grundsatz (κοιναὶ ἔννοιαι) in Euklids Elementen. Euklid hat diese Sätze zwar nicht Axiome genannt. Erst Proklos spricht in seinem Euklidkommentar von Axiomen[12]. Sir Thomas Heath hat aber gezeigt, daß wir – ungeachtet dieser verschiedenen Benennungen – davon ausgehen können, daß zumindest die ersten drei allgemeinen Grundsätze, die mit Sicherheit von Euklid selbst stammen, dem entsprechen, was Aristoteles unter Axiomen bzw. allgemeinen Prinzipien verstanden hat, weil sie nicht direkt von Euklid stammen, sondern mit ziemlicher Sicherheit aus älteren mathematischen Lehrbüchern, die schon Aristoteles bekannt waren[13].

Zur Erinnerung seien die ersten drei allgemeinen Grundsätze Euklids noch einmal aufgeführt:

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
2. Wenn Gleiches Gleichem hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn Gleiches von Gleichem abgezogen wird, sind die Ganzen gleich.

Formalisieren wir diese Sätze, dann sehen wir, daß es sich um allquantifizierte Aussagefunktionen handelt[14]:

1. $(x)(y)(z) \quad : (x=z \wedge y=z) \rightarrow x=y$
2. $(w)(x)(y)(z) : (w=x \wedge y=z) \rightarrow (w+y=x+z)$
3. $(w)(x)(y)(z) : (w=x \wedge y=z) \rightarrow (w-y=x-z)$

---

[11] *Hintikka,* On the Ingredients 59.

[12] Sir *T. Heath,* The thirteen Books of Euclid's Elements, Vol I, New York 1956, 221f.; *ders.,* Mathematics in Aristotle, Oxford 1949, 53.

[13] Vgl. *J. L. Heiberg,* Mathematisches zu Aristoteles, in: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Heft 18, Leipzig (1904), 3–6; *Heath,* Euclid's Elements 222.

[14] So schon *J. Mueller,* Greek Mathematics and Greek Logic, in: J. Corcoran (Hrsg.), Ancient Logic and Its Modern Interpretations, Dordrecht 1974, 35–70; hier: 41.

Axiome sind also allquantifizierte Aussagefunktionen mit zweistelligen Prädikaten. Welche Argumente in die Funktion eingesetzt werden können, ist durch die jeweilige Gattung bestimmt, innerhalb deren etwas bewiesen werden soll.

Die Allgemeinheit der Axiome im Sinne der Analogie (κατ' ἀναλογίαν 76a 38f) liegt darin, daß sie in *verschiedenen* Gattungen gelten. Innerhalb der Arithmetik können Zahlenzeichen für die Variablen eingesetzt werden, innerhalb der Geometrie Ausdrücke für Längen oder Winkelgrößen (76a 42 – 76b 2). Werden die Argumente für die Variablen aus verschiedenen Gattungen gewonnen, dann liegt ein Beweisfehler vor (A7, 75a 38f, 75b 2–8). Solche Sätze sind sinnlos, denn es ist z.B. unmöglich, Zahlen von Winkelgrößen abzuziehen.

Die hier vorgeschlagene Formalisierung der Axiome mit Allquantoren, zweistelligen Prädikaten, Konjunktoren und zweistelligen Funktoren hat den Vorteil, daß eine Präzisierung der aristotelischen These von A7, ein Beweis könne nur innerhalb einer Gattung geführt werden, möglich ist. Der Nachteil der Formalisierung liegt darin, daß die Aristotelische Logik keine Quantoren, mehrstelligen Prädikate, Funktoren usw. kennt. Aristoteles hatte nicht die Möglichkeit, die Axiome wie dargestellt zu formalisieren.

Zum Beweis unserer These, die Axiome seien so formulierbar, daß sie Sätze eines Syllogismus sein können, ist eine andere syntaktische Darstellung der Axiome notwendig. Die Axiome müssen so formuliert werden, daß sie mögliche Sätze eines Syllogismus der Form „Wenn nämlich das A von allen B und das B von allen C ausgesagt wird, dann wird notwendig das A von allen C ausgesagt" (Anal. pr. 25b 37–39; vgl. IV 1 dieser Abhandlung) sind. Das erste Axiom „Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich" läßt sich wie folgt umformulieren: „Wenn nämlich *einander gleich zu sein* (A) von allem ausgesagt wird, *das einem anderen gemeinsamen identischen Anderen gleich ist* (B)"; das zweite Axiom lautet syllogistisch formuliert: „Wenn nämlich *gleich zu sein* (A) von allem ausgesagt wird, *was sich ergibt, wenn Gleiches zu Gleichem hinzugefügt wird* (B)".

Zu dem mit dieser Darstellung verbundenem Problem, welche syntaktische Struktur diejenigen Ausdrücke haben können, die für die Variablen der Standardformulierung eingesetzt werden, verweise ich an dieser Stelle auf IV 1 dieser Abhandlung, wo dieser Frage ausführlich nachgegangen wird.

2. *Die Thesen eines Beweises*

Die Unterscheidung der Prinzipien von Anal. post A 2 wird in Anal. post. A 10 wieder aufgenommen. Das entscheidende Interpretationsproblem des ersten Satzes dieses Kapitels ist, ob Aristoteles in 76a 31–36 von Sätzen oder von Termen ausgeht, d.h., ob sich ἀρχαί auf Sätze oder Terme bezieht.

Heinrich Scholz meint, die ἀρχαί seien „Begriffe", denn die Beispiele, die Aristoteles bringe (76a 34–36), bezögen sich alle auf Begriffe[15]. Barnes vertritt in seinem Kommentar die Gegenthese[16]: Die ἀρχαί seien Sätze, denn A2, 72a 7 lasse die Deutung als Terme nicht zu; Aristoteles definiere ἀρχή klar als πρότασις, also als Satz. Zweitens gehe es in 76a 31–37 um die Definition von Termen, denn sonst wäre es unsinnig, von Bedeutung (σημαίνει 72a 32) zu sprechen – die Bedeutung von „Dreieck" ist seine Definition. Ich halte Barnes' Argumente für durchschlagend. Die ἀρχαί in 76a 31 sind keine Begriffe, sondern Sätze, von denen angenommen wird, daß sie sind, d. h. hier: daß sie wahr sind, weil sie sich nicht beweisen lassen. In der Terminologie von A2 heißt das: In den ersten Sätzen von A10 erläutert Aristoteles die Thesen von A2.

In den nächsten Sätzen (76a 32–36) wird dann die Differenzierung der Thesen in Hypothesen und Definitionen von A2 aufgenommen und präzisiert. Aristoteles geht von Termen aus, die in einer Wissenschaft vorkommen. Er unterscheidet zwischen obersten Termen (τὰ πρῶτα) und Termen, die aus den obersten Termen abgeleitet werden (τὰ ἐκ τούτων). Oberste Terme bezeichnen die einfachen, unzusammengesetzten Gegenstände innerhalb einer Gattung. Aristoteles bringt als arithmetisches Beispiel „Einheit", als geometrische Beispiele „Punkt" und „Linie" (76b 4f).

Abgeleitete Terme bezeichnen diejenigen Gegenstände innerhalb einer Gattung, die aus den einfachen Gegenständen zusammengesetzt sind, wie z. B. „Dreieck". Diese Terme nehmen nun die Subjektstelle in Aussagesätzen ein, und je nachdem, was über die Terme ausgesagt wird, ist die Aussage eine Hypothese oder eine Definition.

a) Die Definition

Es gibt erstens Sätze, die angeben, was die Terme bedeuten. Dieses sind – nach A2 – die Definitionen. Die Definitionen legen die Bedeutung der Terme einer Wissenschaft fest. Sie sind nicht beweisbar, sondern müssen vom Wissenschaftler angenommen werden.

Die Definitionslehre in den Zweiten Analytiken wirft gravierende Probleme auf, denen hier nicht nachgegangen werden kann. Das wichtigste Problem betrifft das Verhältnis der beiden Bücher der Zweiten Analytiken zueinander. Der Anfang des Zweiten Buches behandelt ausführlich eine Definitionslehre, von der unklar ist, inwieweit sie mit dem, was aus dem Ersten Buch zur Frage der Definitionen zu entnehmen ist, übereinstimmt. Wenn wir die Arten der Definitionen von B10 mit den Aussagen, die in A2 und A10 über die Definitionen gemacht werden, vergleichen, so legt es sich nahe, daß auf die Definitionen in A2 und A10 nur der Begriff der sogenannten Nominaldefinition von B10 zutrifft.

---

[15] *H. Scholz,* Die Axiomatik der Alten, in: H. Hermes, F. Kambartel, J. Ritter (Hrsg.), Mathesis Universalis, Basel 1961, 27–44; hier: 38f.

[16] *J. Barnes,* Aristotle's Posterior Analytics, Oxford 1975, 133f.

b) Die Hypothesen

Es gibt zweitens Aussagen, die das Sein derjenigen Entitäten angeben, die durch die obersten Terme bezeichnet werden. Das sind nach A 2 die Hypothesen. Das Aristotelische Standardbeispiel ist der Satz „Einheit ist". Das „ist" – so die meisten Interpreten – ist im Sinne von „existiert" zu verstehen. Eine Hypothese ist also ein Existenzsatz. Die Existenz der durch oberste Terme bezeichneten Entitäten muß der Wissenschaftler annehmen, die Existenz der anderen Entitäten muß er beweisen.

A. Gómez-Lobo[17] hat nun bestritten, daß Hypothesen Existenzsätze sind. Er behauptet, Hypothesen seien singuläre Sätze der Form: „Dies ist ein (oder das) F"[18]. Er beruft sich dabei auf eine Studie von Charles Kahn[19], der gezeigt hat, daß der syntaktisch absolute Gebrauch von „ist" bei Aristoteles nicht garantiert, daß „ist" im Sinne von „existiert" zu verstehen ist. Das „ist" kann elliptisch unter Auslassung des Prädikats- oder Subjektterms gebraucht werden. Wenn es auch richtig ist, daß Aristoteles einen elliptischen Gebrauch von „ist" kennt, so halte ich doch die Behauptung, der elliptische Gebrauch läge auch in den Hypothesen vor, aus folgendem Grund für falsch: Aristoteles betont in A 10 mehrfach, daß das Sein nur von den obersten Entitäten angenommen, von den anderen aber bewiesen werden muß. Diese für Aristoteles wichtige Unterscheidung ergibt, interpretiert man die Hypothese als singulären Satz der Form „Dies ist ein F", keinen Sinn mehr. Ich sehe keinen für eine Beweistheorie relevanten Unterschied zwischen den Sätzen: „Dies ist ein Punkt" (indem ein Geometer auf einen gezeichneten Punkt deutet) und „Dies ist ein Dreieck" (wobei er auf ein gezeichnetes Dreieck deutet). Interpretiert man aber die Hypothese als Existenzsatz, so wird die Aristotelische Unterscheidung von anzunehmenden einfachen Gegenständen und zu beweisenden zusammengesetzten Gegenständen sinnvoll. Ein Geometer definiert zunächst, was ein Punkt und ein Dreieck ist. Die Existenz eines Punktes muß der Geometer annehmen, weil es keinen Beweis für die Existenz eines Punktes gibt. Für die Existenz eines Dreiecks gibt es aber einen Beweis, d. h. hier eine Möglichkeit der Konstruktion[20]. Nur wenn sich aus einfachen Gegenständen zusammengesetzte Gegenstände wirklich konstruieren lassen, kann man von ihnen mit Recht sagen, daß sie existieren.

Existenzsätze dieser Art gehören aber nicht mehr zu den Annahmen, die ein Wissenschaftler machen muß. Weil sich zusammengesetzte Gegenstände konstruieren lassen, nimmt sie der Wissenschaftler nicht ledig-

---

[17] *A. Gómez-Lobo,* Aristotle's Hypotheses and the Euclidean Principles, in: RMet 30 (1977) 430–439.

[18] Ebd. 436.

[19] *C. Kahn,* The Greek Verb „to be" and the Concept of Being, in: Foundation of Language 2 (1966) 245–265.

[20] Vgl. dazu den ersten Lehrsatz aus Euklids „Elementen".

lich an. Annehmen muß er nur die Existenz der einfachen Gegenstände, für die keine Konstruktion möglich ist, wie es z. B. bei einem Punkt der Fall ist.

3. Das Problem bezüglich der Prinzipien

Eines der schwierigsten Interpretationsprobleme der Zweiten Analytiken ist nun folgendes: Einerseits orientiert sich Aristoteles – wie wir gesehen haben – in der Beweistheorie der Zweiten Analytiken an der Syllogistik. Ein wissenschaftlicher Beweis ist ein Syllogismus, der sich von einem nichtwissenschaftlichen Schluß dadurch unterscheidet, daß die Prämissen eines wissenschaftlichen Beweises Prinzipien sind. Die Eigenschaften der Prinzipien garantieren und begründen, daß die Conclusio ein wissenschaftlicher Satz ist.

Nun legt die Form des Syllogismus die Struktur der in einem Beweis möglichen Sätze fest. So müssen z. B. die Prämissen eines Syllogismus genau zwei Terme enthalten. Diese Voraussetzungen erfüllen Existenzsätze wie „Einheit existiert" offensichtlich nicht. Auch eine Definition enthält meist mehr als zwei Terme. Ebenso ist es bezüglich der Axiome unklar, ob und wie sie sich als Prämissen eines Syllogismus umformen lassen.

Die Schwierigkeit, daß die Beweisprinzipien eine andere syntaktische Struktur als die Sätze eines Syllogismus haben, und die Annahme, sie ließen sich auch nicht so umformen, daß sie Sätze eines Syllogismus sein können, sind die Hauptargumente für Barnes, die Unabhängigkeit der Beweistheorie von Syllogistik zu behaupten[21]. Er löst das Problem durch eine historische Hypothese: Die Zweiten Analytiken seien in einer früheren Form vor den Ersten Analytiken entstanden und nach deren Fertigstellung noch einmal überarbeitet worden[22]. Die Konsequenzen der Ergänzung der Beweistheorie durch die Syllogistik habe Aristoteles selbst nicht überblickt.

Gegenüber Barnes soll hier nun gezeigt werden, daß die Axiome sich als Prämissen eines Syllogismus formulieren lassen und welche Funktion die Hypothesen und Definitionen in einem Beweis haben. Zunächst wird jedoch im dritten Teil der Abhandlung die Art der Notwendigkeit einer wissenschaftlichen Conclusio geklärt. Wenn die meisten Interpreten recht hätten mit ihrer Behauptung, die Notwendigkeit einer Conclusio beruhe auf einem definitorischen Verhältnis der Terme in einer Conclusio, dann würde die Beweistheorie schon hier kollabieren, da die Conclusio beweisbar sein muß und Definitionen nicht beweisbar sind.

---

[21] *Barnes*, Proof 30, 33, 51 f., 58.
[22] Ebd. 52–57.

III. Teil: Die Notwendigkeit eines bewiesenen Satzes

Als Beispiel eines zu beweisenden Satzes wählt Aristoteles in den Zweiten Analytiken sehr häufig den Satz, daß (in eigener, gegenüber Aristoteles präzisierter Formulierung) die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck der Summe zweier Rechter Winkel gleich ist (am klarsten: 87b 35–37; 91a 3–4). Tiles[23] betont mit Recht, daß dieser Satz – wir wollen ihn das Dreiecksbeispiel nennen – eine Art paradigmatischen Charakter in der aristotelischen Beweistheorie hat. Der paradigmatische Charakter liegt darin, daß er das „klassische" Beispiel eines Satzes ist, der bewiesen werden kann *und* notwendig ist. Eine der schwierigen Interpretationsfragen der Beweistheorie ist die Frage nach der Notwendigkeit, die den bewiesenen Sätzen zukommt.

Nicht wenige Interpreten halten das Dreiecksbeispiel für ein schlechtes Beispiel des Aristoteles. So urteilt z. B. Wolfgang Kullmann, daß das Dreiecksbeispiel nur ungenügend geeignet sei, seine illustrative Funktion zu erfüllen[24]. Überhaupt mißtraut Kullmann der Veranschauungsmöglichkeit der mathematischen Beispiele und kommt zu dem Ergebnis, daß Aristoteles offensichtlich an der Anwendung seiner Beweistheorie auf die Mathematik selbst nicht interessiert gewesen sei[25]. Diese Interpretation der mathematischen Beispiele hat aber zunächst alle Wahrscheinlichkeit gegen sich, da – bis auf einige Ausnahmen – fast alle Beispiele in den für die Beweistheorie relevanten Kapiteln A 2–10 aus der Mathematik bzw. Geometrie kommen.

Ich möchte im folgenden zeigen, daß gerade die genaue Analyse des Dreiecksbeispiels zu einem in sich schlüssigen Verständnis der Beweistheorie führt, die sich sowohl an der logischen Form der Syllogistik als auch an der Mathematik orientiert.

1. Die Bedeutung von „an-sich"

a) Notwendigkeit und an-sich Beziehung (A 4, 73a 21–27)

In Anal. post. A 4 klärt Aristoteles, was es heißt, daß ein Satz, der im eigentlichen Sinn gewußt wird, einen Sachverhalt ausdrückt, der sich unmöglich anders verhalten kann. Ein Satz ist dann notwendig, wenn er drei Bedingungen erfüllt: Das Verhältnis der Terme in einem notwendigen Satz muß erstens ein an-sich (καθ' αὑτό) Verhältnis sein, der Satz muß zweitens ein Allsatz sein und drittens muß das Prädikat dem Subjekt als dem zukommen, was es ist (ᾗ αὐτό A 4, 73b 26f).

Der Schwerpunkt des nun folgenden Abschnitts wird auf einer Analyse der an-sich Beziehung liegen. Aristoteles unterscheidet in A 4 vier ver-

[23] *J. E. Tiles,* Why the Triangle has Two Right Angles Kath' Hauto, in: Phron. 28 (1983) 1–16; hier: 1f.

[24] *W. Kullmann,* Die Funktion der mathematischen Beispiele in Aristoteles' Analytica posteriora, in: E. Berti, Aristotle on Science (s. Anm. 2) 245–270; hier: 269f.

[25] Ebd. 268.

schiedene Bedeutungen von „an-sich". Die Frage, welche Bedeutung von „an-sich" dem Verhältnis der Terme in einer Conclusio zukommt, wird – bis auf einige Andeutungen im Kommentar von Seidl[26] und bei Tiles[27] – durchweg falsch beantwortet. Diese falsche Analyse führt dann zu dem Vorwurf, Aristoteles' Beweistheorie sei inkonsistent. Es ist wichtig zu betonen, daß Aristoteles dadurch, daß er in A 4 über das Verhältnis zweier Terme in einem Satz spricht und den Notwendigkeitsbegriff an dem Verhältnis der Terme zueinander expliziert, von vornherein jede Erklärung der Notwendigkeit eines bewiesenen Satzes durch die formale *Struktur* eines Beweises ausschließt.

Eine Bemerkung zur Methode: Zunächst wird das Dreiecksbeispiel und das ihm zugrunde liegende an-sich Verhältnis nur von A 4 her analysiert. Die wichtigsten Metaphysikstellen Met. V 30, 1025 a 30–34 und Met. V 18, 1022 a 24–36 werden zunächst beiseite gelassen. Auch die umstrittene Frage, wie sich die an-sich Prädikation in die Liste der Prädikabilien in Topik A 5 einfügt, bleibt vorerst offen. Es ist ein hermeneutisches Prinzip, sich zu bemühen, so weit wie möglich einen Text aus sich heraus zu verstehen. Wir werden aber sehen, daß unsere Analyse von A 4 sich durch die Metaphysik- und Topikstellen als richtig erweist.

b) Die beiden ersten Bedeutungen von „an-sich" (A 4, 73 a 34 – 73 b 5)

Die erste Bedeutung von „ an-sich" ist in der Forschung allgemein unumstritten: Wenn der Prädikatsbegriff in der Definition des Subjektsbegriffs vorkommt, kommt er ihm an-sich(1) zu. So schreibt Barnes in seinem Kommentar[28]: „(1) A belongs to B in itself $=_{df.}$ A belongs to B and belongs in the definition of B."

Als Beispiel wählt Aristoteles das Verhältnis von „Dreieck" zu „Linie". Daraus kann man ersehen, daß sich Aristoteles die Definition des Dreiecks von der Anzahl der Linien her dachte[29].

Dagegen ist die genaue Bedeutung des zweiten an-sich Verhältnisses in der Forschung umstritten. Einerseits legt es Aristoteles nahe, an-sich(2) ähnlich wie an-sich(1) zu definieren: Wenn ein Subjektsbegriff in der Definition des Prädikatbegriffs vorkommt, kommt er ihm an-sich(2) zu. So schreibt Barnes[30]: „(2) A belongs to B in itself $=_{df.}$ A belongs to B and B belongs in the definition of A." Diese Definition wird durch Stellen wie 73 a 37 f oder 84 a 12–17 nahegelegt. Andererseits haben die Bei-

[26] *H. Seidl,* Aristoteles' Zweite Analytiken, Würzburg/Amsterdam 1984, 346 f. Seidl stellt zwar die Behauptung auf, „daß unter die vierte Bedeutung des an sich Ausgesagten in I 4 die beweisbaren Eigenschaften der Dinge fallen, die ihnen notwendig und allgemein zukommen" (346); er belegt oder begründet diese Behauptung aber nicht und geht auf die Schwierigkeiten, die mit der vierten Bedeutung von an-sich gegeben sind, nicht ein.

[27] *Tiles* 13 f.

[28] *Barnes,* Aristotle's Post. 114.

[29] Vgl. Met. VII 11, 1036 b 8 ff.

[30] *Barnes,* Aristotle's Post. 114.

spiele in 73 a 38–41 und andere Stellen in A 4 u. a. Wedin[31] dazu bewogen, die an-sich(2) Zugehörigkeit wie folgt zu definieren: „A is B1 or B2 and B $=_{df}$...A... and B2 $=_{df}$...A... ≡. either B1 or B2 belongs (or, alternatively, is predicated) per se_2 to A“[32]. Nach Wedin geht es bei der an-sich(2) Zugehörigkeit also um Prädikate einer „exclusive disjunction“, von der notwendig eines der Prädikate dem Subjekt zukommen muß (A 4, 73 b 21–24).

Mit Berufung auf die Beispiele die Bedeutung von an-sich(2) auf eine ausschließende Disjunktion von Paaren einzuschränken, ist jedoch nicht berechtigt. Der entscheidende Punkt der an-sich(2) Beziehung wird von Aristoteles nach den Beispielen, auf die in der Tat Wedins Definition zutrifft, wieder aufgenommen: Die Beispiele dienen dazu zu zeigen, daß das Subjekt in dem λόγος, der das τί ἐστι des Prädikats angibt, vorkommt (73 b 1–3). Hier bestätigt sich, daß Barnes Interpretation von an-sich(2) richtig ist.

Es fragt sich nun, ob das Verhältnis der Terme in dem Dreiecksbeispiel ein an-sich(2) Verhältnis ist. Obwohl fast alle Interpreten dieses behaupten und dann Aristoteles Unklarheit vorwerfen, ist diese Frage eindeutig zu verneinen[33]. Wenn man sich Wedins Interpretation der an-sich(2) Beziehung anschließt, ist klar, daß „Summe von zwei Rechten Winkeln“ kein Term ist, der zur Klasse der „exclusive disjunctions“ von Paaren gehört. In diesem Sinne treffen vielmehr die Prädikate „gleichseitig“ und „ungleichseitig“ (73 a 40 f) auf das Dreieck zu. Wenn man Barnes Interpretation von an-sich(2) folgt, so ist es aus folgendem Grund nicht richtig zu behaupten, daß der Term „Dreieck“ in einer Definition von „Summe von zwei Rechten Winkeln“ vorkommen muß.

a) Das Prädikat „Summe zweier Rechter Winkel“ trifft nicht nur auf das Dreieck zu, sondern auch auf andere geometrische Figuren. So ist die Winkelsumme an einer geschnittenen Geraden ebenfalls der Winkelsumme zweier Rechter Winkel gleich. Daß Aristoteles diesen mathematischen Lehrsatz kannte, beweist Met. IX 9, 1051 a 24 f. Dort schreibt er, daß die Winkel um einen Punkt (und damit ist der Punkt gemeint, an dem die Gerade geschnitten wird) zwei Rechten Winkeln gleich sind.

Gegen das hier naheliegende Argument, nur dem Dreieck als *Figur* kommt eine Winkelsumme von 180 Grad zu und die Konstruktion einer geschnittenen Gerade sei nicht im eigentlichen Sinne eine Figur, läßt sich zeigen, daß der Aristotelische Figurenbegriff außerordentlich weit gefaßt ist und daß sogar „Winkel“ und „Gerade“ Figuren im Aristotelischen Sprachgebrauch sind (vgl. Phys. I 5, 188 a 25).

---

[31] *V. E. Wedin Jr*, A Remark on Per Se Accidents and Properties, in: AGPh 55 (1973) 30–35.

[32] Ebd. 34.

[33] Zuletzt hat *Tiles* ausführlich die Aporien aufgezeigt, in die wir geraten, wenn wir das Verhältnis der Terme in dem Dreiecksbeispiel als ein an-sich(2) Verhältnis bestimmen.

b) Wenn einmal definiert ist, was ein Rechter Winkel ist, dann ist es naheliegend – wenn es überhaupt sinnvoll sein soll –, auch „Summe zweier Rechter Winkel" von einem Rechten Winkel her zu definieren.

Das Verhältnis der Terme in einer Conclusio ist also weder ein an-sich(1) noch ein an-sich(2) Verhältnis. Die dritte Bedeutung von „an-sich" braucht uns hier nicht zu beschäftigen, weil hier das Verhältnis des Subjekts- zum Prädikatsbegriff kein notwendiges Verhältnis ist und insofern für unser Dreiecksbeispiel, das ja ein notwendiger Satz sein soll, nicht in Frage kommt.

c) Die vierte Bedeutung von „an-sich" (73b 10–16)

Ich möchte nun zeigen, daß sich die mit der Interpretation des Dreiecksbeispiels verbundenen Schwierigkeiten lösen lassen, wenn wir davon ausgehen, daß das Verhältnis der Terme im Dreiecksbeispiel ein an-sich(4) Verhältnis ist.

Die vierte Bedeutung von „an-sich" führt Aristoteles anhand eines Beispiels ein, in dem es um das Verhältnis zweier Ereignisse geht: Einem Tier wird der Hals durchgeschnitten (Ereignis 1), und dieses Tier stirbt (Ereignis 2). Das Beispiel der Tierschlachtung wird von Aristoteles in 73b 10–12 von einem anderen Beispiel unterschieden: Man geht einen Weg entlang (Ereignis 1), und während man geht, blitzt es (Ereignis 2). Der Unterschied der beiden Beispiele besteht darin, daß die beiden Ereignisse jeweils in einem unterschiedlichen Verhältnis zueinander stehen. Wenn es, während man einen Weg entlanggeht, blitzt, so ist das Verhältnis der beiden Ereignisse zueinander zufällig. Das Verhältnis der Ereignisse „Halsdurchschneiden des Tieres" und „Tod des Tieres" ist demgegenüber nicht zufällig (οὐ συνέβη): das erste Ereignis ist Grund des zweiten; *weil* dem Tier der Hals durchgeschnitten wird, stirbt es. Entscheidend ist nun, das Verhältnis der Ereignisse auf ein Verhältnis von Prädikaten zurückzuführen. Das erste Prädikat *begründet* in an-sich(4) Aussagen, warum dem Subjekt das zweite Prädikat zugesprochen wird: Das Tier bekommt den Hals durchgeschnitten; und weil es den Hals durchgeschnitten bekommt, stirbt es. Die syntaktische Struktur der an-sich(4) Aussagen ist also: a ist F, und weil a F ist, ist a G.

Meine These ist, daß das Verhältnis der Terme im Dreiecksbeispiel ein an-sich(4) Verhältnis ist. Wie im Beispiel der Tierschlachtung geht es auch im Dreiecksbeispiel um das Verhältnis zweier Prädikate, die in einem begründenden Verhältnis zueinander stehen: Dem Subjekt „Figur" werden die Prädikate „ist ein Dreieck" und „hat zwei Rechte Winkel" zugesprochen. Das begründende Verhältnis: Diese Figur ist ein Dreieck, und weil sie ein Dreieck ist, hat sie zwei Rechte Winkel.

Tiles[34] findet das Tierbeispiel aus zwei Gründen problematisch. Der

[34] *Tiles* 14.

erste: Das Verhältnis der Terme „geschlachtet (bzw. geopfert) werden" und „sterben" ist ein an-sich(1) Verhältnis: „Being sacrificed and being slaughtered are by definition undergoings which involve death"[35]. Er weist darauf hin, daß man das griechische Verb σφάττεσθαι aber auch mit „den Hals durchgeschnitten bekommen" übersetzen kann. Dazu schreibt er: „The explanation of why death should follow an animal's having its throat cut will involve much the same level of work in natural epistēmē that the explanation of why the triangle has 2R involves in geometric epistēmē"[36]. Es scheint mir folglich nicht unmöglich zu sein, das Aristotelische Beispiel so zu interpretieren, daß in ihm das Verhältnis der Terme nicht ein definitorisches ist. Das Verhältnis der Prädikate „bekommt den Hals durchgeschnitten" und „sterben" ist auch deswegen vom an-sich(1) Verhältnis unterschieden, weil die syntaktische Struktur der an-sich(1) und der an-sich(4) Sätze unterschiedlich ist. Eine Definition hat eine andere Struktur als eine an-sich(4) Aussage. Tiles zweiter Grund, das an-sich(4) Verhältnis abzulehnen, obwohl „it would be natural to think that the 2R theorem should be treated as kath' hauto in the fourth sense [...]"[37], ist, daß Aristoteles so erpicht darauf gewesen sei, „to proceed as though all kath' hauto predications must be of the two key types [...]"[38]. Auch andere Interpreten[39] stimmen ihm darin zu. Dieses Argument finde ich nicht überzeugend, weil Aristoteles, wie wir gesehen haben, betont, daß das Verhältnis der Prädikate im Beispiel der Tierschlachtung nicht akzidentell ist. Es gibt also keinen Grund anzunehmen, nur die ersten beiden Typen von an-sich Aussagen seien notwendige Aussagen. Dennoch ist es verwirrend, daß Aristoteles das Dreiecksbeispiel erst am Ende von A4 (73b 28 – 74a 3) ausführlich diskutiert und nicht völlig klarstellt, in welchem an-sich Verhältnis die Terme des Dreiecksbeispiels zueinander stehen. Insbesondere bleibt unverständlich, warum Aristoteles die an-sich(4) Beziehung nur durch Prädikate, die Ereignisse beschreiben, veranschaulicht und nicht an jedem für ihn so fundamentalen Dreiecksbeispiel selbst.

Von diesem Ergebnis her soll noch kurz auf das Problem eingegangen werden, wie das an-sich Verhältnis in Met. V 30 und, damit zusammenhängend, Met. V 18 zu interpretieren ist. Damit werden wir uns auch der Frage stellen, ob das Prädikat „Summe von zwei Rechten Winkeln" Proprium im Sinne von Top. A 5 ist. Sowohl die Analyse der Metaphysikstellen als auch die der Topik werden das bisherige Ergebnis, daß das Verhältnis der Prädikate in den zu beweisenden Sätzen ein an-sich(4) Verhältnis ist, bestätigen.

---

[35] Ebd. [36] Ebd.
[37] Ebd. [38] Ebd.
[39] So z. B. *B. Ross* 519: „For the sake of completeness A. [Aristotle] mentions two other cases in which the expression καθ' αὑτό is used".

d) An-sich in Met. V18, Met. V30 und Top. I5

In Met. V30, 1025a 30–34 bestimmt Aristoteles die Beziehung der Terme im Dreiecksbeispiel als eine „akzidentelle an-sich" Beziehung (συμβεβηκὸς καθ' αὑτό). Um die Bedeutung von „an-sich" zu ermitteln, greifen die Interpreten auf Met. V18, 1022a 24–36 zurück, wo Aristoteles fünf Bedeutungen von „an-sich" unterscheidet. D. Hadgopoulos meint[40], und er verweist dabei auf den Kommentar von Ch. Kirwan[41], daß die fünfte Bedeutung von „an-sich" für das Dreiecksbeispiel gilt. Diese fünfte Bedeutung ist, weil der Text korrupt ist, umstritten. Kirwan, dessen Lesart ich überzeugend finde, identifiziert die fünfte an-sich Beziehung mit der der Proprien aus der Topik. An-sich(5) kommt ein Prädikat einem Subjekt also dann zu, wenn das Prädikat ein Proprium des Subjekts ist, d. h. nicht in der Definition des Subjektsbegriffs vorkommt und mit dem Subjekt gegenprädizierbar ist. Hadgopoulus meint nun, daß die an-sich Akzidentien Proprien im Sinne der Topik sind. Er ist damit ein Vertreter der „Synonomiethese", die die Identität von Proprien und an-sich Akzidentien behaupten.

Die Gegner der Synonomiethese, namentlich Barnes und Wedin, bestreiten die Gegenprädizierbarkeit der Prädikate in den Sätzen mit an-sich Akzidentien. Barnes[42] argumentiert, daß die an-sich Aussagen Konklusionen wissenschaftlicher Beweise seien und in den Konklusionen nur sehr selten Gegenprädizierbarkeit vorkomme (A3, 73a 16–18; A12, 78a 10–13). Wedin[43] ergänzt dieses Argument noch durch den Hinweis auf Textstellen, in denen Aristoteles die an-sich Akzidentien ausdrücklich den Proprien gegenüberstellt (Anal. post. A19–22, besonders 82a 15, 83b 18–19, 84a 11–27).

Meines Erachtens ist das schlagendste Argument gegen die Gegenprädizierbarkeit jedoch folgendes: Wie Met. IX9, 1051a 24f zeigt, beweist Aristoteles das Dreiecksbeispiel mit Hilfe des Satzes, daß die Winkelsumme um eine geschnittene Gerade der Winkelsumme zweier Rechter Winkel gleich ist[44]. Das Prädikat „Summe zweier Rechter Winkel" trifft also nicht nur auf das Dreieck zu, sondern ebenso auf eine geschnittene Gerade. Mithin sind die an-sich Akzidentien keine Proprien, weil das Prädikat „Summe zweier Rechter Winkel" nicht einem und nur einem Subjekt zugesprochen wird. Wenn die an-sich Akzidentien keine Proprien sind, wie fügen sie sich dann in die Liste der Prädikabilien in Topik A5? Daß das Verhältnis der Terme kein definitorisches ist, haben wir ge-

---

40 *D. Hadgopoulos,* The Definition of the „Predicables" in Aristotle, in: Phron. 21 (1976) 59–63.

41 *Ch. Kirwan,* Aristotle's Metaphysics Books Gamma, Delta, Eta, Oxford 1971.

42 *J. Barnes,* Property in Aristotle's Topics, in: AGPh 52 (1970) 136–155; hier: 139f.

43 *Wedin* 30f.

44 Entgegen *Heilbergs* gründlicher Studie (s. Anm. 13) sind wir der Meinung, daß aus der Metaphysikstelle klar zu entnehmen ist, daß Aristoteles den Satz gekannt haben muß.

sehen. Die an-sich Akzidentien sind Akzidentien im Sinne der Definition von Akzidentien in der Topik. Ein Problem besteht darin, daß Aristoteles zwei verschiedene Definitionen von Akzidentien kennt und nur die erste Definition auf die an-sich Akzidentien zutrifft. So schreibt Barnes[45]: „In truth, ‚per se accidents' do not fit at all neatly into the fourfold classification of the ‚predicables'. They are neither definitions nor genera nor properties; therefore, by Aristotle's *first* definition of ‚accident' (A5 102b 4–5), they are accidents. But they belong necessarily to their subjects; therefore, by the *second* definition of ‚accident' (A5 102b 6–7), they are not accidents".

Der grundsätzliche Fehler von Kirwan und Hadgopoulos liegt darin, die Bedeutung von an-sich in 1025a 31 durch einen Verweis auf Met. V18 beantworten zu wollen. 1025a 30–34 hat eher den Charakter eines Anhangs. Aristoteles verweist vor allen Dingen auf Anal. post. A4, wo die Bedeutung des „an-sich" für das Dreiecksbeispiel angegeben ist. Dieser Verweis in einem so dichten Text wie Met. V entbindet uns von der Aufgabe, die Bedeutung von „an-sich" in Met. V30 mit einer von Met. V18 in Übereinstimmung bringen zu müssen.

Die Analyse von Met V30 bestätigt noch einmal unser Ergebnis der Untersuchung von an-sich(4). Das Verhältnis der Terme im Dreiecksbeispiel ist nicht das der Definition noch das des Propriums. Es ist nicht das an-sich(1) oder an-sich(2) Verhältnis. Das Verhältnis der Prädikate im zu beweisenden Satz ist ein an-sich(4) Verhältnis. Dieses Verhältnis nennt Aristoteles einerseits akzidentell; anderseits ist es aber nicht zufällig, wie es eigentlich bei Akzidentien der Fall ist. Dieses Akzidenz kann ewig (ἀίδια 1025a 33) sein, und darin unterscheidet es sich von den übrigen Akzidentien.

2. Die Allgemeinheit der Conclusio (A4, 73b 25 – 74a 3)

Daß das Verhältnis der Terme in einem Satz ein an-sich Verhältnis sein muß, ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Notwendigkeit dieses Satzes. Im zweiten Teil von A4 verknüpft Aristoteles den Begriff der Notwendigkeit mit dem der Allgemeinheit: Wenn ein Prädikat einem Subjekt allgemein zukommt (καθόλου), dann kommt es ihm notwendig zu (A4, 73b 26–28). Ein Prädikat kommt einem Subjekt genau dann allgemein zu, wenn es drei notwendige und zusammen hinreichende Bedingungen erfüllt (73b 26f):

Es muß ihm an-sich zukommen, es muß von allen gelten, und es muß dem Subjekt als dem zukommen, was es ist (ᾗ αὐτό).

Dieser Text stellt uns vor zwei Fragen:

1) Wie unterscheidet sich der hier definierte καθόλου-Begriff vom κατὰ παντός-Begriff in 73a 28–34?

[45] *Barnes,* Property 140.

2) Warum führt Aristoteles noch eigens die ᾗ αὐτό-Beziehung an, wenn er sie doch gleich darauf (73b 28f) mit der an-sich Beziehung identifiziert?

Zu 1): Der Unterschied zwischen κατὰ παντός und καθόλου liegt darin, daß ein Prädikat einem Subjekt καθόλου dann zugesprochen wird, wenn es ihm nicht nur in jeder Instantiierung zugesprochen wird (κατὰ παντός), sondern ihm auch als erstem (πρῶτον) zukommt.

Zur Erläuterung bedient sich Aristoteles wieder seines Dreiecksbeispiels: Das Prädikat „hat zwei Rechte Winkel" kommt weder dem Subjekt „Figur" noch dem Subjekt „gleichschenkliges Dreieck" als erstem zu. Der erste Fall ist unproblematisch: Das Prädikat „hat zwei Rechte Winkel" kann nicht dem Subjektsbegriff „Figur" allgemein zukommen, weil es viele Figuren gibt (Bsp. Viereck 73b 37), auf die das Prädikat nicht zutrifft. Der Subjektsterm „Figur" ist also zu weit. Der Fall des gleichschenkligen Dreiecks ist ein wenig anders gelagert: Von einer Figur werden zwei Prädikate ausgesagt, nämlich „... ist ein Dreieck" und „... ist gleichschenklig". Die Eigenschaft, zwei Rechte Winkel zu haben, kommt der Figur nun nicht deswegen zu, weil sie gleichschenklig ist, sondern weil sie ein Dreieck ist. Deswegen spielt die Eigenschaft „... ist gleichschenklig" für einen Beweis, daß die Figur zwei Rechte Winkel hat, auch keine Rolle. Nur sofern die Figur ein Dreieck ist (ᾗ αὐτό), kommt ihr das Prädikat „... hat zwei Rechte Winkel" zu. Dreieck zu sein, ist also in dem Sinn eine erste Eigenschaft einer Figur, weil nur aufgrund der Eigenschaft, ein Dreieck zu sein, von der Figur bewiesen wird, daß sie zwei Rechte Winkel hat, und nicht aufgrund einer anderen Eigenschaft (z.B. gleichschenklig zu sein), die ihr eventuell auch noch zukommt.

Zu 2): ᾗ αὐτό wird von Aristoteles eingeführt, um den eben beschriebenen Sachverhalt so klar wie möglich zu formulieren (vgl. auch die langen Ausführungen A5, 74a 25 – 74b 4). ᾗ wird gebraucht, um Eigenschaften, die einem Gegenstand zukommen, genau voneinander zu unterscheiden und nur von einer der verschiedenen Eigenschaften sprechen zu können, ohne diese jedoch – wie Platon es tat – zu vergegenständlichen[46]. Im Dreiecksbeispiel: Wir betrachten das εἶδος des Dreiecks (A5, 74a 31) und untersuchen es daraufhin, welche Prädikate ihm zukommen. ᾗ αὐτό kommen dem Dreieck nun alle diejenigen Prädikate zu, die ihm an-sich zukommen, und zwar in der ersten, zweiten und vierten Bedeutung von an-sich. So kommen z.B. dem Dreieck als Dreieck diejenigen Prädikate, die in der Definition des Dreiecks vorkommen, wie Punkt und Linie an-sich(1) zu. Das Prädikat „gleichschenklig" kommt einem „Dreieck", das gleichschenklig ist, an-sich(2) zu, und an-sich(4) kommt ihm das Prädikat 2R zu.

[46] Vgl. *W. Wieland*, Die Aristotelische Physik, Göttingen ²1970, 197.

Ich fasse zusammen: Die Analyse von A4 hat ergeben, daß das Verhältnis der Terme in einer Conclusio ein an-sich(4) Verhältnis ist. Dieses Ergebnis ist für eine Beweistheorie deswegen wichtig, weil nur für an-sich(4) Aussagen ein Beweis überhaupt möglich ist. Nur die an-sich(4) Aussagen erfüllen die an wissenschaftliche Sätze gestellte Forderung, notwendig und beweisbar zu sein. An-sich(1) und an-sich(2) Aussagen sind zwar notwendig, aber, weil das Verhältnis der Terme auf definitorischen Verhältnissen beruht, nicht beweisbar. Ebensowenig ist beweisbar, daß ein Proprium einem Subjekt zukommt. An-sich(4) Aussagen sind notwendige, nicht unvermittelte und begründbare Aussagen. Nur sie können Konklusionen eines Syllogismus sein. Für an-sich(4) Aussagen ist ein Beweis möglich und sinnvoll. Ein Beweis für das Dreiecksbeispiel zeigt, *warum* die Innenwinkelsumme eines Dreiecks stets der Summe zweier Rechter Winkel gleich ist. Nur wenn wir den Grund dafür kennen, wissen wir den Satz im eigentlichen, wissenschaftlichen Sinn. Wie ein solcher Beweis aufgebaut ist und welche Funktion die Prinzipien und der Syllogismus in ihm haben, werden wir nun im letzten Teil des Aufsatzes klären.

IV. Mathematischer Beweis und Syllogismus

Die vielen mathematischen Beispiele in den ersten zehn Kapiteln der Zweiten Analytiken deuten darauf hin, daß die Terme und Prämissen eines Beweises aus der Mathematik bzw. Geometrie genommen werden können. Die Beweistheorie soll für die Mathematik gültig sein. Aristoteles war offensichtlich der Meinung, mathematische Beweise – und damit auch der Beweis für das Dreiecksbeispiel – ließen sich in syllogistische Form bringen. Sowohl in den Ersten als auch in den Zweiten Analytiken gibt es wichtige Textstellen, die belegen, daß nach Aristoteles mathematische Beweise in der ersten Figur geführt werden können (Anal. pr. A4, 25b 30f, A23 und Anal. post. z.B. A14, 79a 17–21).

Die meisten Interpreten werfen Aristoteles hier einen grundsätzlichen Irrtum vor. So vertritt Barnes in seinem Aufsatz „Proof and the Syllogism" die These, daß die Logik der Ersten Analytik inadäquat für die Formulierung auch nur des elementarsten geometrischen Beweises sei. „Syllogism is a small and relatively insignificant part of logic; and the mathematician who tries to conduct his arguments within its confines will get nowhere"[47]. Barnes trennt die Apodeiktik von der Syllogistik und behauptet, die Apodeiktik sei früher entstanden als die Syllogistik und sachlich von ihr unabhängig[48]. Sein wichtigstes Argument ist, wie wir gesehen haben, daß die Axiome und Hypothesen aufgrund ihrer syntaktischen Struktur keine möglichen Sätze in einem Syllogismus sein können.

[47] *Barnes*, Proof 19.
[48] Ebd. 30, 52ff.

Ebenso bezweifelt Jan Mueller in seinem Aufsatz „Greek Mathematics and Greek Logic", daß sich die mathematischen Beispiele, die Aristoteles in den Ersten Analytiken bringt, in syllogistische Form bringen lassen[49]. Sein Aufsatz hat stärkeres Gewicht, weil Barnes auf die mathematischen Beispiele innerhalb der Syllogistik, also hauptsächlich auf Anal. pr. A 24 und A 35, mit keinem Wort eingeht. Mueller kommt ohne eine historische Hypothese aus und versucht, Aristoteles innerhalb der Syllogistik einen Fehler nachzuweisen. Mueller hält daran fest, daß Aristoteles selbst zur Zeit der Abfassung der Ersten Analytiken der Auffassung gewesen ist, daß sich mathematische Beweise in syllogistische Form bringen lassen: „there can be no doubt that Aristotle includes *mathematical* proofs among syllogism in the general sense".[50] Nur bezweifelt Mueller, indem er A 24 und A 35 analysiert, daß das möglich ist. Seine wichtigsten Argumente werden im Zusammenhang mit einem geometrischen Beweis referiert.

In einem ersten Punkt soll der Begriff des Syllogismus geklärt werden, um dann in einem zweiten Punkt anhand eines Beweises für das Dreiecksbeispiel zu sehen, welche Funktion der Syllogismus in einem mathematischen Beweis hat. Es wird in diesem Punkt ebenfalls deutlich werden, wie es möglich ist, daß Axiome als Prämissen eines Syllogismus stehen können. In einem dritten Punkt wird die Frage nach der Funktion der Hypothesen und Definitionen in einem Beweis noch einmal aufgegriffen.

1. Der Begriff des Syllogismus

Der entscheidende Punkt in der Diskussion ist folgender: Ob man meint, daß sich mathematische Beweise in syllogistische Form bringen lassen, hängt wesentlich vom zugrunde gelegten Begriff des Syllogismus ab. Unsere Frage lautet also: Gibt es eine Bestimmung des Begriffs des Syllogismus der ersten Figur bei Aristoteles, in der sich das Dreiecksbeispiel beweisen läßt?

In Anal. pr. A 4 führt Aristoteles zwei Definitionen für einen Syllogismus der ersten Figur im Modus Barbara an:

a) Die Definition vom Umfang der Terme her (25 b 32–35):[51] Wenn sich die drei Termini (ὅροι) so zueinander verhalten, daß der letzte in dem mittleren (als in einem) ganzen und der mittlere in dem ersten Terminus (als in einem) ganzen ist [...], dann gibt es notwendigerweise einen vollkommenen Schluß hinsichtlich der Außenbegriffe"[52].

b) Die Definition mit Variablen (25 b 37–39) – die sogenannte Standardformulierung im Modus Barbara: Wenn nämlich das A von allen B

[49] *Mueller* (s. Anm. 14).

[50] Ebd. 50.

[51] Vgl. zum folgenden *G. Patzig*, Die aristotelische Syllogistik, Göttingen [3]1969; hier besonders § 22.

[52] Übersetzung von *Patzig*, ebd.

und das B von allen C ausgesagt wird, dann wird notwendig das A von allen C ausgesagt."

Zu a): Ein vollkommener Schluß liegt also in folgendem Fall vor: Gegeben sind drei Terme (vgl. die Definition von ὅρος 24b 16–18), ein erster, ein mittlerer und ein letzter Term. Die Terme stehen in einem bestimmten Verhältnis zueinander, das Aristoteles „ἐν ὅλῳ εἶναι" nennt. Es geht ihm dabei um den Umfang der Terme. Diejenige Menge der Elemente, auf die der letzte Term zutrifft, ist Teilmenge derjenigen Menge der Elemente, auf die der mittlere Term zutrifft, und diese Menge ist wiederum Teilmenge derjenigen Menge der Elemente, auf die der erste Term zutrifft.

Zu b): Genau denselben Sachverhalt beschreibt die Standardformulierung, allerdings sprachlich gewendet. Um gleich zu dem für uns entscheidenden Punkt zu kommen: Welches ist die syntaktische Form derjenigen Ausdrücke, die für die Variablen eingesetzt werden?

Wir wollen hier einen engen von einem weiten Syllogismusbegriff unterscheiden. Unter dem engen Syllogismus wollen wir einen Syllogismus verstehen, in dem der Wertebereich der Variablen nur generelle Termini[53] umfaßt, die aus genau einem Wort bestehen. Dieser enge Syllogismusbegriff wird nun von Aristoteles ausdrücklich in A 35 erweitert: Die ὅροι müssen nicht immer durch ein Wort wiedergegeben werden können, sondern sie können auch λόγοι sein, d. h. aus mehreren Wörtern bestehen.

Das Kapitel A 35 ist für unsere Fragestellung wichtig, weil Aristoteles die Erweiterung des Wertebereichs zusammen mit dem Dreiecksbeispiel diskutiert. Nachdem er gezeigt hat, wie ein Syllogismus mit der Conclusio, daß die Innenwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks zwei Rechten Winkeln gleich sind, aussieht, betont Aristoteles, daß sich beweisen läßt, daß das Dreieck *an sich* zwei Rechte Winkel hat. Zwar gibt es dafür keinen Mittelbegriff (οὐκ εἶναι μέσον); das heißt aber nicht, daß diese an-sich Aussage unvermittelt sei, sondern nur, daß (48a 37–39) das μέσον hier kein Term, sondern ein λόγος ist, also nicht durch ein einzelnes Wort wiedergegeben werden kann.

Hier zeigt sich noch einmal die Richtigkeit der Annahme, daß das Verhältnis der Terme der Conclusio ein an-sich(4) Verhältnis ist. Nur sie können nämlich notwendig sein und doch nicht unvermittelt, denn an-sich(1) und an-sich(2) Aussagen sind unvermittelte Aussagen. Das heißt: Obwohl wissenschaftliche Aussagen notwendig sind, sind sie nicht unvermittelt und begründbar (vgl. die beiden Kriterien des Wissens A 2). So ist es, um Aristoteles' Beispiel noch einmal aufzunehmen, die Aufgabe eines Naturforschers, den Zusammenhang zwischen dem Halsdurchschneiden eines Tieres und dessen Tod zu erforschen. Er kann dabei zeigen, daß

---

[53] Ebd. § 3.

man, wenn man einem Tier den Hals durchschneidet (σφάττεσθαι), lebenswichtige Funktionen des Tieres stört und diese Störung im Organismus des Tieres dessen Tod hervorruft.

Entscheidend für die Möglichkeit der syllogistischen Formulierung mathematischer Beweise ist es, daß Aristoteles offensichtlich keine Regeln für die mögliche syntaktische Strukturierung der λόγοι, die für die Variablen in der Standardformulierung eingesetzt werden können, einführt. Neben A 35 ist dafür das Kapitel A 24 relevant. Beide Kapitel werden von Patzig, der behauptet, daß der Wertebereich der Variablen nur generelle Termini umfaßt, nicht erwähnt.

Erstens wird in A 24 für geometrische Beweise die Beschränkung auf generelle Termini aufgehoben. Aristoteles hat A 24, 41 b 13–22 zufolge die Auffassung vertreten, daß einzelne Winkel einer geometrischen Konstruktion als Terme für die Variable C der Standardformulierung eingesetzt werden können. Von dem allgemeinen Satz „Alle Winkel in einem Halbkreis sind einander gleich" (41 b 16 f) kann darauf geschlossen werden, daß die konkreten Winkel AC und BD an einem Halbkreis in einer Konstruktionszeichnung, an die Aristoteles gedacht haben muß, einander gleich sind. Patzigs generelle These, Aristoteles benutze in der Syllogistik keine Singularurteile als Prämissen gültiger Schlüsse[53], ist also hinsichtlich mathematischer Beweise, in denen ὅροι durch λόγοι zu ersetzen sind, dahingehend zu modifizieren, daß in den λόγοι geometrischer Beweise singuläre Terme vorkommen dürfen.

Zweitens fällt bei einer Analyse von Anal. pr. A 24, 41 b 13–22 auf, daß syntaktisch verschiedene Ausdrücke für die λόγοι eingesetzt werden können. Neben singulären Termini gebraucht Aristoteles generelle Termini (z. B. „Winkel im Halbkreis") und zweistellige Prädikate (z. B. „einander gleich sein"): „Wenn nämlich *einander gleich zu sein* (A) von allen *Winkeln der Halbkreise* (B) ausgesagt wird und *Winkel im Halbkreis* (B) zu sein von *AC und BD* (C) ausgesagt wird, dann wird notwendig *einander gleich zu sein* (A) von *AC und BD* (C) ausgesagt."

Ohne diese Erweiterungen ist eine syllogistische Formulierung des Dreiecksbeweises nicht möglich.

Der geometrische Beweis wird in der ersten Figur geführt, aber nicht im Modus Barbara. Die für einen geometrischen Beweis notwendige Form lautet in Anlehnung an die Standardformulierung: „Wenn nämlich das A von allen B und das B von C ausgesagt wird, dann wird notwendig das A von C ausgesagt". Daß für die Variable C der Standardformulierung singuläre Terme eingesetzt werden, ist formallogisch insofern unproblematisch, als die Variable C sowohl in der Minor als auch in der Conclusio an Subjektstelle steht und weder von A noch von B (wie in der zweiten und dritten Figur) prädiziert wird. Damit entfällt für die erste Figur ein wichtiger Grund, nur generelle Termini für die Variablen zuzulassen.

2. *Der Beweis für den Dreieckssatz*

Welches ist nun der λόγος, der in der Standardformulierung für B eingesetzt werden kann? Aristoteles erwähnt ihn in Met. IX 9, 1051 a 24 f: „Warum hat ein Dreieck zwei Rechte Winkel? Weil die Winkel um einen Punkt zwei Rechten gleich sind." Mit dem Ausdruck „Die Winkel um einen Punkt sind zwei Rechten gleich" bezieht sich Aristoteles auf denjenigen mathematischen Lehrsatz, der behauptet, daß die Summe der Winkel um eine geschnittene Gerade immer 180 Grad beträgt (vgl. Euklid I 13). Wir setzen also in die Standardformulierung ein:

„Wenn nämlich *zwei Rechten Winkeln gleich zu sein* von *allen Winkeln, die um einen Punkt gelegen sind,* ausgesagt wird, und von *allen Winkeln, die um einen Punkt gelegen sind,* ausgesagt wird, daß sie *den Innenwinkeln eines Dreiecks gleich* sind, dann wird notwendig *zwei Rechten Winkeln gleich zu sein* von den *Innenwinkeln eines Dreiecks* ausgesagt." Gegenüber einem engen Syllogismus finden sich zwei Veränderungen: Einmal – wie schon bekannt – die Ersetzung der Variablen durch mehrere Wörter, und zum zweiten, daß das Verhältnis des Umfangs der Terme nicht mehr durch die Teilmengenrelation, sondern durch die Umfangsgleichheit der Terme dargestellt wird. Das scheint uns aber unproblematisch zu sein, weil die Umfangsgleichheit der Terme ein Sonderfall des ἐν ὅλῳ εἶναι der Definition (a) ist.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir den Beweis, an den Aristoteles gedacht haben kann, rekonstruieren und seine logische Struktur analysieren. Dabei werden wir sehen, welche Funktion die Prinzipien in einem Beweis haben, wie also etwa die Axiome Beweisprämissen sein können. Auf die Streitfrage, ob Aristoteles beim Dreiecksbeweis an die Form Euklid I 32 gedacht hat (wofür das Verb ἀνάγειν Met. IX 9, 1051 a 24 spricht), wie Heath herausgearbeitet hat[54], oder an die uns über Eudemus-Proklos überlieferte pythagoreische Form des Beweises (wie neuerlich wieder Tiles[55] behauptet hat, indem er sich auf einen – unseres Wissens immer noch unveröffentlichten – Aufsatz von Mendell bezieht), wollen wir hier nicht weiter eingehen. Es ist eine für die Geschichte der Mathematik sicherlich interessante Frage, sie spielt aber für unsere Fragestellung direkt keine Rolle, weil die Beweise insofern sehr ähnlich sind, als sie dieselben mathematischen Sätze und Axiome voraussetzen und keine voneinander grundsätzlich verschiedene logische Struktur aufweisen. Wir werden uns im folgenden ausschließlich an Euklid I 32 orientieren, weil das die ausführlichste Darstellung des Dreiecksbeweises ist. Alles, was wir über I 32 sagen, ließe sich aber auch auf die pythagoreische Form des Beweises übertragen.

Der Beweis des Satzes I 32 besteht aus zwei Teilen[56]. Der erste Teil

---

[54] *Heath,* Mathematics 216 f.
[55] *Tiles* 16.
[56] Vgl. zum Ganzen: *Heath,* Euclid's Elements 316–322.

umfaßt die zu beweisende Behauptung, eine Konstruktionsanweisung sowie eine Wiederholung der Behauptung, die sich von der ersten Formulierung dadurch unterscheidet, daß sie auf die Konstruktion hin konkretisiert ist[57]:

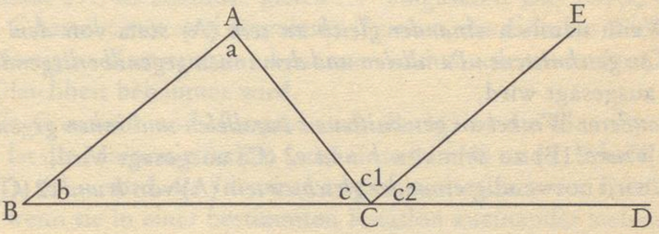
(1) An einem Dreieck ist der bei der Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel den beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln zusammen gleich, und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks sind zusammen zwei Rechten gleich.

(2) Das Dreieck sei ABC; man verlängere seine eine Seite BC nach D.

(3) Ich behaupte, daß der Außenwinkel (c1 + c2) den beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln a und b gleich ist und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks a,b,c, zwei Rechten Winkeln gleich sind.

(4) Ziehe durch Punkt C eine gerade Linie, die zu AB parallel ist.

Wenn wir die Konstruktionsanweisung befolgen, erhalten wir also folgende Figur:



Es ist klar, daß dieser erste Teil des Beweises völlig ungeeignet dafür ist, auf mögliche Syllogismen hin überprüft zu werden.

Der eigentlich beweisende Teil, die ἀπόδειξις[58], beginnt erst mit Satz (5). Erst er kann sinnvoll auf eine ihm zugrunde liegende logische Form hin untersucht werden.

(5) Weil nun AB parallel zu CE ist, und die Parallelen von der geraden Linie AC geschnitten werden, sind die Wechselwinkel a und c1 einander gleich.

(6) Ebenso ist, da AB parallel zu CE ist, und die Parallelen von der geraden Linie BC geschnitten werden, der äußere Winkel c2 dem innen gegenüberliegenden Winkel b gleich.

(7) Wie oben bewiesen worden ist, sind die Winkel c1 und a gleich.

(8) Also ist der ganze Winkel (c1 + c2) den beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln a und b gleich.

(9) Man füge nun den Winkel c zu beiden hinzu.

---

[57] Die folgende Wiedergabe des Euklidbeweises unterscheidet sich von einer wörtlichen Übersetzung dadurch, daß der Einfachheit halber die Winkel mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet worden sind (also „c" statt „ABC" bei Euklid). Die Numerierung der Sätze findet sich selbstverständlich nicht bei Euklid.

[58] Zur Terminologie siehe: *Heath*, Euclid's Elements 129ff.

(10) Dann sind (c1 + c2) und c den Winkeln a, b, c gleich.

(11) Die Winkel (c1 + c2) und c sind aber zwei Rechten Winkeln gleich.

(12) Also sind die Winkel a, b, c zwei Rechten Winkeln gleich.

Soweit also der Beweis des Dreiecksbeispiels in der Version von Euklid. Welches ist nun die logische Struktur der Sätze (5) bis (12)? Die verschiedenen Schritte des Beweises lassen sich mit Hilfe der Standardformulierung der ersten Figur rekonstruieren:

(5') Wenn nämlich *einander gleich zu sein* (A) von allen *Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen* (B) ausgesagt wird,
und *Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen* (B) zu sein von *a und c1* (C) ausgesagt wird,
dann wird notwendig *einander gleich zu sein* (A) von *a und c1* (C) ausgesagt.

(6') Wenn nämlich *einander gleich zu sein* (A) stets von *dem äußeren Winkel an geschnittenen Parallelen und dem innen gegenüberliegenden Winkel* (B) ausgesagt wird,
und *äußerer Winkel an geschnittenen Parallelen und innen gegenüberliegender Winkel* (B) zu sein von *b und c2* (C) ausgesagt wird,
dann wird notwendig *einander gleich zu sein* (A) von *b und c2* (C) ausgesagt.

(8') Wenn nämlich *einander gleich zu sein* (A) von dem ausgesagt wird, *was sich ergibt, wenn Gleiches Gleichem hinzugefügt wird* (B),
und *als Gleiche Gleichem hinzugefügt worden sein* (B) von *c1 + c2 und a + b* (C) ausgesagt wird,
dann wird notwendig *einander gleich zu sein* (A) von *c1 + c2 und a + b* (C) ausgesagt.

(10') Wenn nämlich *einander gleich zu sein* (A) von dem ausgesagt wird, *was sich ergibt, wenn Gleiches Gleichem hinzugefügt* (B) wird,
und als *Gleiche Gleichem hinzugefügt worden sein* (B) von *c1 + c2 + c und a + b + c* (C) ausgesagt wird,
dann wird notwendig *einander gleich zu sein* (A) von *c1 + c2 + c* und *a + b + c* (C) ausgesagt.

(11') Wenn nämlich *zwei Rechten Winkeln gleich zu sein* (A) von den *Winkeln an einer geschnittenen Gerade* (B) ausgesagt wird,
und *Winkel an einer geschnittenen Gerade zu sein* (B) von *c1 + c2 + c* (C) ausgesagt wird,
dann wird notwendig *zwei Rechten Winkeln gleich zu sein* (A) von *c1 + c2 + c* (C) ausgesagt.

(12') Wenn nämlich *einander gleich zu sein* (A) von allem ausgesagt wird, *das einem gemeinsamen identischen Anderen gleich* (B) ist,

und *einem gemeinsamen identischen Anderen gleich zu sein* (B) von *a+b+c und zwei Rechten Winkeln* (C) ausgesagt wird,

dann wird notwendig *einander gleich zu sein* (A) von *a+b+c und zwei Rechten Winkeln* (C) ausgesagt.

Wie ist nun ein einzelner Syllogismus gebaut?!

Die Conclusio behauptet in jedem der Syllogismen, daß zwei Winkel aus der im ersten Teil angefertigten Konstruktion dieselbe Größe haben (daß die beiden Winkel aus der Summe mehrerer Unterwinkel bestehen können und eigentlich von zwei Winkelsummen die Identität bewiesen wird [z. B. (10') a + b + c = c1 + c2 + c] spielt für eine Analyse des Beweises keine Rolle). Für die Variable A der (modifizierten) Standardformulierung „Wenn nämlich das A von allen B und das B von C ausgesagt wird, dann wird notwendig das A von C ausgesagt“ wird jeweils das zweistellige Prädikat „... ist einander gleich ...“ eingesetzt. Der λόγος für die Variable C besteht aus zwei singulären Termen, die einzelne Winkel aus der angefertigten Konstruktion benennen und von denen in der Conclusio die Gleichheit behauptet wird.

Wie die Conclusio so behauptet auch die Maior die Identität zweier Größen. Ist die Maior ein Axiom [so Axiom 2 in (8') und (10') und Axiom 1 in (12')], dann wird die Identität zweier unspezifizierter Größen behauptet, wenn sie in einer bestimmten Relation zueinander stehen (etwa Axiom 1: wenn sie beide einem gemeinsamen identischen Anderen gleich sind). Die Größen sind unspezifiziert, weil Axiome sowohl für Zahlen, Längen, Winkel usw. gelten. Ist die Maior ein bereits bewiesener Satz [so Satz I 29 in (5') und (6'); I 13 in (11')], wird durch die Maior die Identität von bestimmten Winkeln behauptet. Die Winkel sind dadurch charakterisiert, daß sie in einer beliebigen Konstruktion an einer bestimmten räumlichen Stelle liegen müssen.

Der λόγος, der für B eingesetzt wird, besteht aus generellen Termini, von denen in der Minor behauptet wird, daß sie auf bestimmte Winkel in der Konstruktionszeichnung, die für die Variable C eingesetzt werden, zutreffen. Der λόγος, der für B eingesetzt wird, begründet jeweils die Conclusio, z. B. (5'): Warum sind a und c1 einander gleich? Weil sie Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind; oder (12'): Warum sind a + b + c und zwei Rechte Winkel einander gleich? Weil sie beide einem gemeinsamen identischen Anderen gleich sind[59]. Wir können natürlich noch weiterfragen: Warum sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen einander gleich? Warum sind Dinge, die einem gemeinsamen identi-

[59] Vgl. auch Anal. post. B 11, wo Aristoteles ausführt, daß der Mittelterm derjenige ist, der die Conclusio begründet.

schen Anderen gleich sind, einander gleich? In beiden Fällen fragen wir nach einer Begründung des Obersatzes des Syllogismus.

Der Obersatz ist nun entweder ein von Euklid bereits bewiesener Satz oder ein Axiom. Wichtig ist, daß wir die Warum-Frage bei den Axiomen nicht mehr sinnvoll stellen können, weil sie Prinzipien sind und sie eines Beweises nicht bedürfen (und es auch keinen Beweis für sie gibt, weil ein Axiom ein unvermittelter Satz ist).

Exkurs

Der Verweis auf Euklid I29 ist problematisch, denn Euklid setzt in diesem Beweis die Gültigkeit seines fünften Postulats voraus. Das fünfte Postulat fordert, daß, wenn zwei Geraden von einer dritten geschnitten werden und die Summe der Innenwinkel auf einer Seite kleiner ist als die Summe zweier Rechter Winkel, die beiden geschnittenen Geraden sich, würde man sie verlängern, auf derjenigen Seite schneiden würden, auf der die Summe der Innenwinkel kleiner als die Summe zweier Rechter Winkel ist.

Das Problem besteht darin, daß sich das fünfte Euklidische Postulat nicht in die Aristotelische Prinzipienlehre einfügt. Es ist weder eine Definition noch eine Hypothese, noch ein Axiom. Andererseits ist es aber auch kein Satz, für den ein Beweis möglich ist[60]. Aus den Aristotelischen Schriften läßt sich nichts darüber entnehmen, wie Aristoteles den Satz in seine Beweistheorie einordnen würde.

Diese Beobachtung deutet auf das Problem hin, welches entsteht, wenn man versucht, die Euklidische Geometrie mit der Aristotelischen Terminologie zu analysieren. Das ist nur bedingt möglich, weil sich die euklidischen Prinzipien von den Prinzipien der Aristotelischen Beweistheorie unterscheiden. So gibt es bei Euklid keine Existenzsätze unter den Prinzipien, und Aristoteles kennt keine Euklidischen Postulate.

Ein weiteres Problem entsteht dadurch, daß es Euklidbeweise gibt, in denen der eigentliche Beweisteil nur minimal ist, und bei denen das Hauptgewicht auf der Konstruktion liegt. Problematisch ist insbesondere Euklids vierter allgemeiner Grundsatz, der im Beweis seines vierten Lehrsatzes verwandt wird. Der vierte allgemeine Grundsatz, das sogenannte ἐφαρμόζειν-Axiom, arbeitet mit dem Kongruenzbegriff und lautet: „Dinge, die miteinander zusammenfallen (ἐφαρμόζειν), sind einander gleich“[61]. Der Beweis mit Hilfe dieses allgemeinen Grundsatzes setzt die empirische Anschauung voraus: Zwei Dinge sind dann gleich groß, wenn sie dadurch, daß sie in einer Konstruktionszeichnung aufeinander verschoben werden, zusammenfallen. Wenn etwa Seidl in seinem Kommen-

[60] Vgl. *Heath*, Euclid's Elements 202–220.
[61] Vgl. ebd. 224–231.

tar zu den Zweiten Analytiken schreibt: „Prinzipiell läßt sich [...] jeder geometrische Beweis in die syllogistische Form der ersten Figur bringen"[62], so scheint mir diese Behauptung nur schwer einlösbar zu sein. Die Euklidische Geometrie läßt sich nicht befriedigend in der Aristotelischen Terminologie und Beweismethode analysieren. Andererseits ist die Quellenlage der voreuklidischen mathematischen Lehrbücher aber so schlecht, daß wir nicht in der Lage sind, die Frage zu klären, wie weit die Mathematik zur Zeit der Abfassung der Zweiten Analytiken bereits als ein axiomatisiertes System vorlag, an dem sich Aristoteles dann orientiert hat.

Ich habe mich bemüht zu zeigen, daß es möglich ist, einen Beweis für das Dreiecksbeispiel in syllogistische Form zu bringen, und daß Aristoteles an einen Beweis in dieser Art gedacht haben muß.

Doch zurück zur Analyse des Beweises: Es ist bemerkenswert, daß die logische Struktur der bewiesenen Sätze und der Axiome dieselbe ist. Beide lassen sich formalisieren als allquantifizierte Sätze mit Variablen. Für die Axiome ist dieses ja schon gezeigt worden. Die Formalisierung von I 29 wäre:

(x)(y)(x und y sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen → x=y).

In dem Untersatz des Syllogismus werden nun für die Variablen entweder die Winkel aus der Konstruktionszeichnung [bei (5') und (6')] oder die Konklusion früherer Syllogismen eingesetzt [ab (8')].

Die allquantifizierten Sätze mit Variablen werden also durch Einsetzung der Ausdrücke für Winkel aus der Konstruktion zu auf die Konstruktion bezogenen, spezifischen Allsätzen.

Gegen diese Analyse bringt Mueller[63] zwei Einwände. Er behauptet, daß sich ein Beweis, der mit Axiom 1 arbeitet, nicht in syllogistische Form bringen läßt. Unser Beweis arbeitet in (12') mit Axiom 1. Mueller würde (12') so formalisieren:

(1') $(u)(v)(w)(u=w \wedge v=w \rightarrow u=v)$

(2') $a+b+c=c1+c2+c$

(3') $2R=c1+c2+c$

(4') darum: $a+b+c=2R$

Müller weist darauf hin, daß die syllogistische Form mit dem Axiom 1 als Maior in der Antike ein Paradigma eines mathematischen Arguments gewesen ist, und zitiert den Kommentar des Alexander von Aphrodisias zu den Analytika Posteriora. Dieser faßt ein mathematisches Argument in eine syllogistische Form. Wenn wir seine syllogistische Formulierung des Arguments auf unser Dreiecksbeispiel übertragen, erhalten wir folgenden Syllogismus:

---

[62] *Seidl* 324.

[63] *Mueller* 41 f., 52.

(12'') (5⁺) Dinge, die einem anderen gleichen Ding gleich sind, sind einander auch gleich

(6⁺) a+b+c und 2R sind einem anderen gleichen Ding gleich

(7⁺) Also sind a+b+c und 2R einander gleich.

Mueller schreibt nun, daß es keine Möglichkeit gebe, diese Analyse zu widerlegen, solange man die Form dieses Syllogismus isoliert betrachtet. „Yet the context of the inference makes clear why the Peripatetics were wrong“[64]. Sein Argument: Die Minor des Beweises, also (6⁺), setzt die Conclusio zweier anderer Syllogismen voraus. Dies ist richtig. In (10') wurde gezeigt, daß a+b+c den Winkeln c1+c2+c gleich ist, in (11') wurde gezeigt, daß 2R den Winkeln c1+c2+c gleich ist. Beide Sätze brauchen wir für (12'). Mueller meint nun, daß wir für die Conclusio (7⁺) eigentlich einen Syllogismus mit mehr als drei Termen benötigen würden.

Obwohl (10'), (11') und (12') einzeln als Syllogismen konstruiert werden können, „they cannot be combined to yield a syllogistic reconstruction of Euclid's apodeixis“[65]. Mueller sieht richtig, daß die verschiedenen Schritte nicht so kombiniert werden können, daß wir einen zusammenfassenden Syllogismus mit mehr als drei Termen haben, der die Schritte (10'), (11') und (12') in sich einschließt. Das widerspräche dem Begriff des Syllogismus, der mit nur drei Variablen arbeitet. Warum aber eine Aneinanderreihung von aufeinander aufbauenden Syllogismen nicht möglich sein soll, ist nicht einsichtig. Daß wir in einem Beweis bereits bewiesene Sätze benutzen dürfen, sagt Aristoteles ausdrücklich, und es wäre eine unbegründete Engführung, die bewiesenen Sätze auf diejenigen Sätze einschränken zu wollen, die Euklid als mathematische Sätze aufführt (also in unserem Beispiel I 13 und I 29).

Mueller bringt noch einen zweiten Einwand: Er schreibt in direktem Bezug auf den Dreiecksbeweis: „In such a proof the terms ‚triangle‘ and ‚two right angles‘ cannot function as categorical terms because the proof involves breaking the triangle and the two right angles into parts, and the spatial relations of the parts are crucial“[66]. Auch diesen Einwand halte ich für fraglich, da die wesentliche Relation in diesem Beweis die Gleichheitsrelation ist, die die Gleichheit von Winkelsummen unabhängig von deren räumlicher Lage feststellt. Weil Aristoteles mit der Winkel*summe* arbeitet, ist es unerheblich, ob die einzelnen Winkel in Teile zerlegt werden oder nicht.

3. Die Definitionen und Hypothesen

Im Abschnitt IV 2 ist gezeigt worden, daß es möglich ist, einen Beweis für einen für das Verständnis der Aristotelischen Beweistheorie wichtigen Beispielsatz in eine syllogistische Form zu bringen. Für die Variablen

---

[64] Ebd. 42. [65] Ebd. [66] Ebd. 52.

der Standardformulierung des Syllogismus der ersten Figur können mathematische Terme eingesetzt werden. Wir haben gesehen, daß Axiome Prämissen eines Syllogismus sind. Offen ist die Frage, welche Funktion die Thesen von A2, also die Hypothesen und Definitionen in einem Beweis haben. Die Thesen in einem Beweis sind diejenigen Sätze, die ein Wissenschaftler für seine Wissenschaft annehmen muß. Sie gehen in einen Beweis als Beweis*voraussetzungen* ein. So setzt der Beweis für das Dreiecksbeispiel voraus, daß wir wissen, was die Terme „Dreieck", „Außenwinkel" usw. bedeuten. Wenn man den Beweis für das Dreiecksbeispiel *vollständig* notieren wollte, müßte man mit den Definitionen der in einem Beweis vorkommenden Terme beginnen[67].

Nicht nur Definitionen, sondern auch Existenzannahmen gehören nach Aristoteles zu den einem Beweis zugrunde liegenden Voraussetzungen. Wir haben gesehen, daß nach Aristoteles aus einfachen Elementen wie Punkten und Linien zusammengesetzte Gegenstände wie ein Dreieck dann existieren, wenn sie sich konstruieren lassen. Die Existenz der zusammengesetzten Gegenstände in der Geometrie setzt also stets die Existenz einfacher Gegenstände, die nicht konstruierbar sind (wie z.B. Punkte), voraus. Die Definitionen und Hypothesen sind also Sätze, die als Voraussetzungen in einen Beweis eingehen. In einer vollständigen Notation eines geometrischen Beweises dürften sie nicht fehlen.

Dieses Ergebnis bestärkt aber die Vermutung, daß Definitionen und Hypothesen nicht Prämissen eines Syllogismus sein können. Hierin liegt ein Problem, für das es meines Erachtens keine Lösung gibt.

Zusammenfassung

Ziel des Aufsatzes war es zu zeigen, daß das für die Erklärung einiger wichtiger Thesen der Zweiten Analytiken immer wieder zitierte Dreiecksbeispiel sich gegen die Einwände der Interpreten adäquat mit Hilfe der logischen Form des Syllogismus rekonstruieren läßt. Damit ist ein entscheidender Einwand gegen die Konsistenz der Beweistheorie des Aristoteles widerlegt.

Zunächst ist der Begriff des Axioms präzisiert worden. Axiome sind allquantifizierte Aussagefunktionen mit zweistelligen Prädikaten. Wie die vielen mathematischen Beispiele der Beweistheorie nahelegen, können für die Variablen mathematische Terme eingesetzt werden.

Zweitens ist gezeigt worden, daß die durch die Definition des Wissens geforderte Notwendigkeit der Conclusio nicht auf der Notwendigkeit der Definition beruht oder die des Propriums ist. Das Verhältnis der Terme in der Conclusio ist ein an-sich(4) Verhältnis. Nur an-sich(4) Aussagen sind notwendige und dennoch nicht unvermittelte und begründ-

[67] So auch *Tiles* 9.

bare Aussagen. Anhand eines Beweises für das Aristotelische Standardbeispiel einer Conclusio, daß die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck der Summe zweier Rechter Winkel gleich ist, haben wir gesehen, daß die logische Struktur eines mathematischen Beweises durch eine Reihung von Syllogismen beschrieben werden kann. Die Maior eines solchen Syllogismus ist entweder ein Axiom oder ein bereits bewiesener Satz.

Der Vorwurf, daß die mathematischen Beispiele irreführend sind, weil Aristoteles an einer Anwendung der Beweistheorie auf die Mathematik nicht interessiert gewesen sei, ist also ebenso unberechtigt wie Barnes' Vermutung, daß die beiden Analytiken sachlich voneinander unabhängig seien und Aristoteles bei der Überarbeitung der Zweiten Analytiken nach Fertigstellung der Ersten Analytiken die Konsequenzen einer Ergänzung der Beweistheorie durch die Syllogistik nicht überblickt habe.